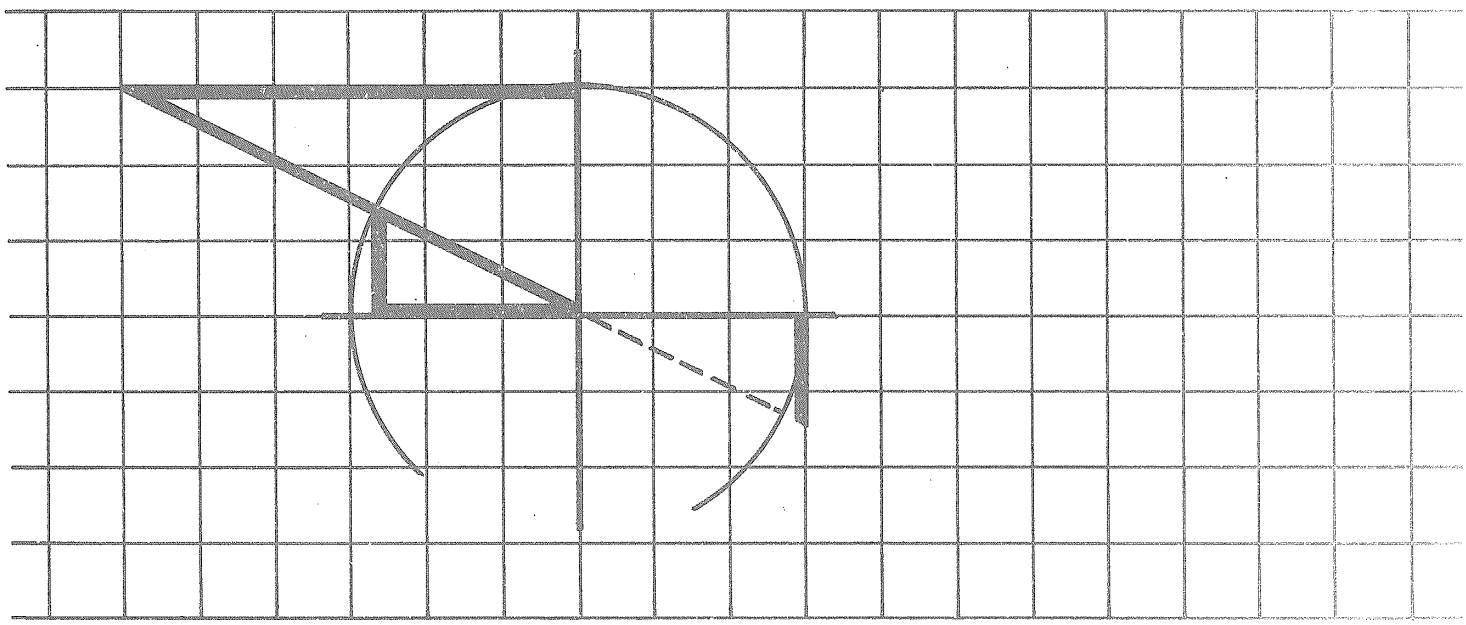
EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. *El círculo trigonométrico*
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

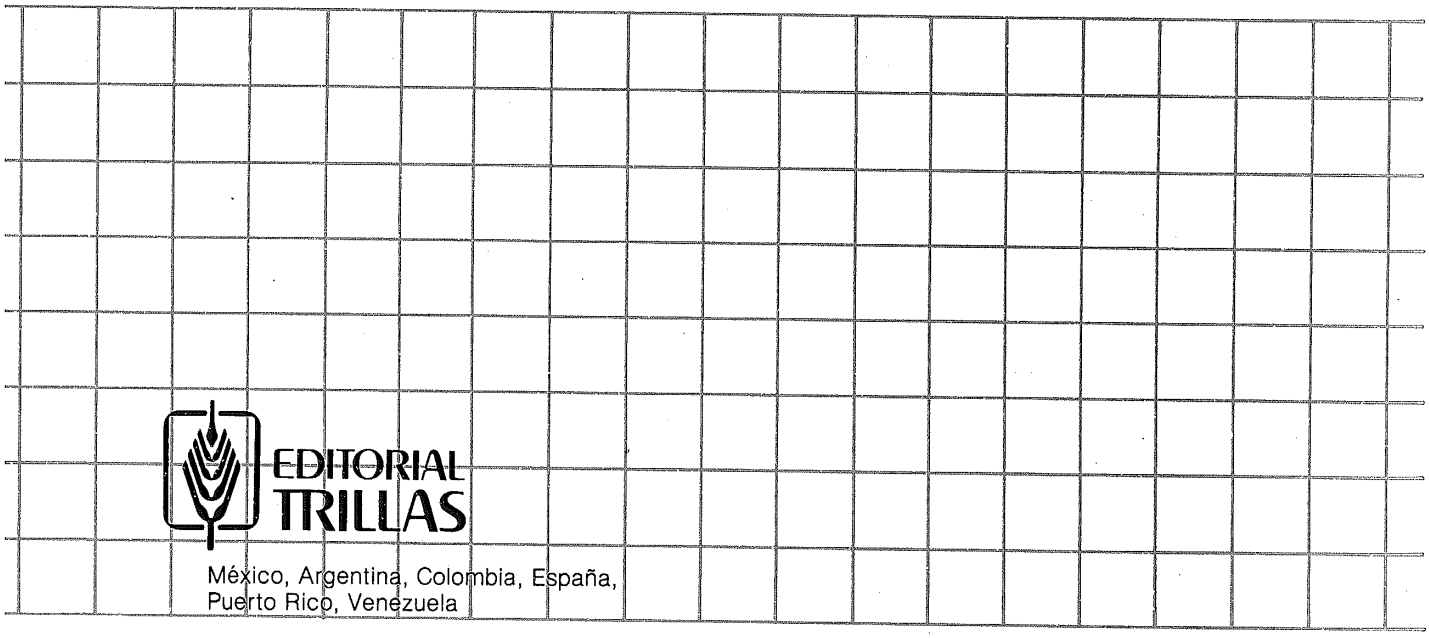


Módulos de matemáticas

Bloque 5
Trigonometría

Módulo 3
EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Conrado Flores García



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0842-3

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 El ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas 9

3.2 Las razones trigonométricas en el plano cartesiano 23

3.3 El círculo unitario 32

3.4 Representación de ángulos en el círculo unitario 41

3.5 Las razones trigonométricas para el ángulo cualquiera en el círculo unitario 63

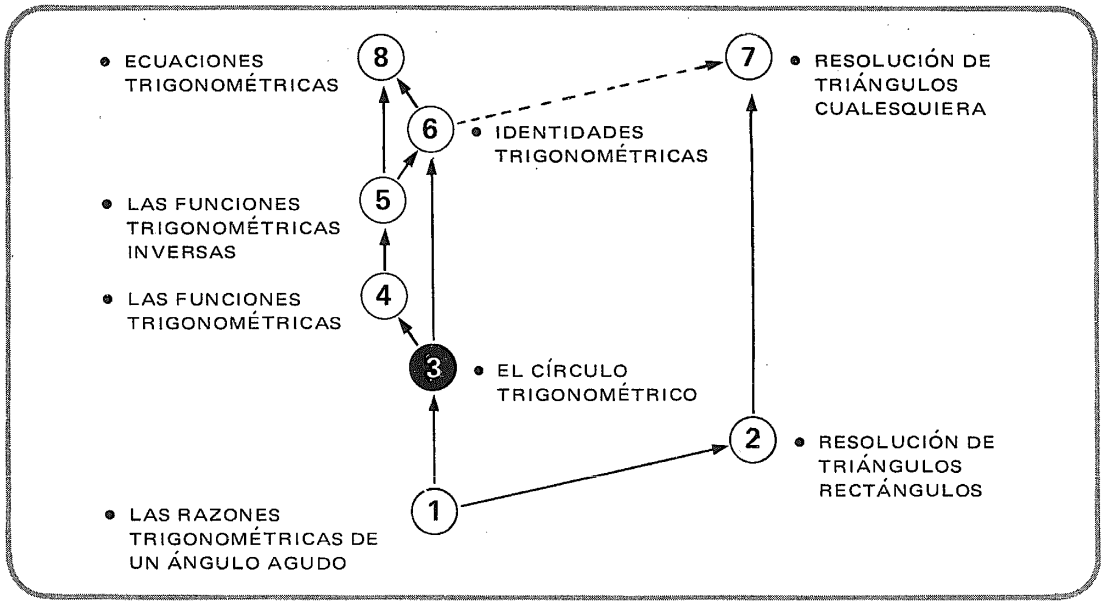
3.6 Determinación de las razones trigonométricas para ángulos de cualquier medida 80

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 3. El círculo trigonométrico

Objetivos: determinar el valor numérico de todas las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier medida (grados o radianes)

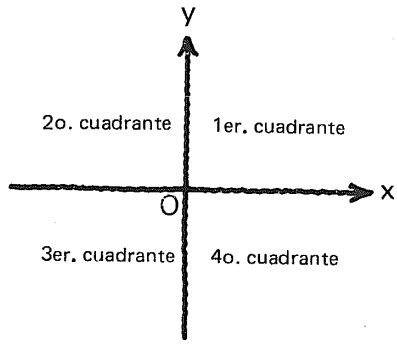
Prerrequisitos.	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, y la raíz cuadrada	–	–
• Razón y proporción (concepto y manejo)	–	–
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Conceptos de número real positivo, negativo y nulo	1	12
• Coordenadas cartesianas (concepto y manejo)	2	7
• Propiedades geométricas del triángulo, de los demás polígonos convexos y de la circunferencia	4	4, 5
• Teorema de Pitágoras (concepto y manejo)	4	6
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1

3.1

El ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas

1

Recordemos que, para la representación gráfica de productos cartesianos, relaciones y funciones, hemos establecido un sistema de dos ejes numéricos perpendiculares entre sí, que dividen al plano en 4 cuadrantes.

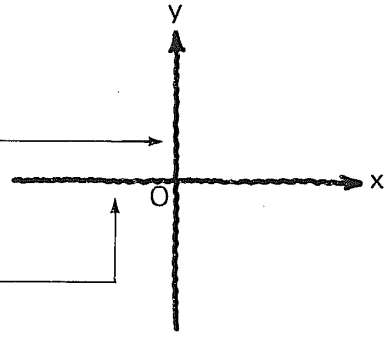


2

Les hemos llamado:

eje de las ordenadas o eje de las y, y

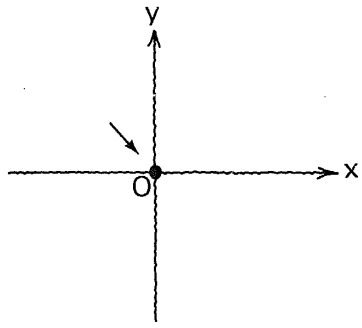
eje de las abscisas o eje de las x.



3

Al punto de intersección
de los dos ejes
le hemos denominado

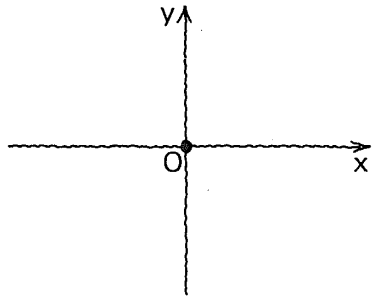
└_____┘



origen

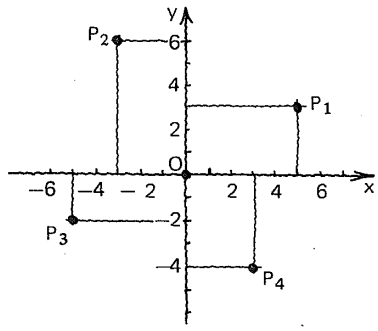
4

En este sistema,
cualquier **par ordenado**
de números reales
puede ser
representado
por medio de
un punto único,
y a cualquier punto del
plano le corresponde
un único par ordenado de
números reales.



5

Por ejemplo:
el punto P_1
es la representación
del par ordenado └_____┘.
El punto P_2 es
la representación
del par ordenado └_____┘.
El punto P_3 es
la representación
del par ordenado └_____┘.
El punto P_4 es
la representación
del par ordenado └_____┘.



(5, 3)

(−3, 6)

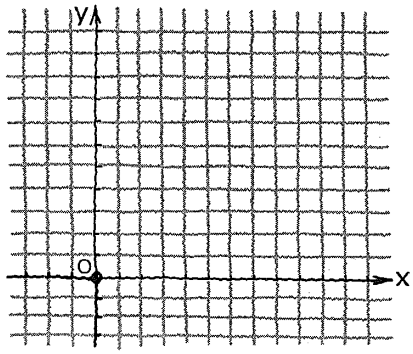
(−5, −2)

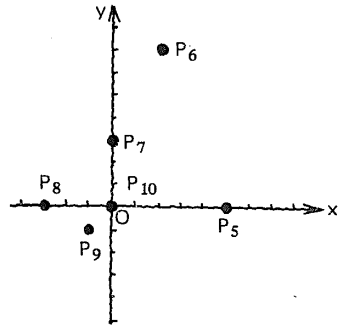
(3, −4)

6

Representemos
los pares ordenados.

$P_5\,(5, 0)$
$P_6\,(2, 7)$
$P_7\,(0, 3)$
$P_8\,(-3, 0)$
$P_9\,(-1, -1)$
$P_{10}\,(0, 0)$

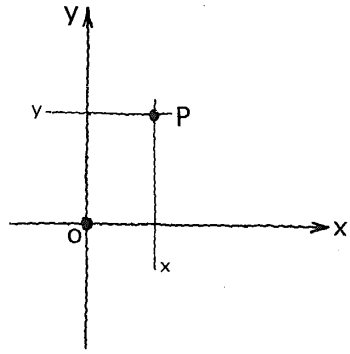




7

A los componentes
del par ordenado (x, y)
les llamamos
las **coordenadas** del punto P

x es la [ ]
y [ ] del punto P.
y la [ ]

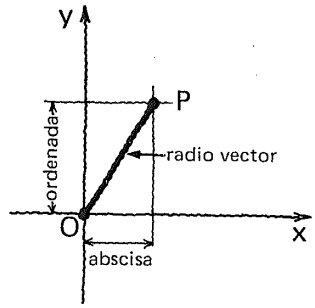


abscisa

ordenada

8

Introduciremos,
ahora,
un nuevo término:
radio vector del punto P,
que designará
al segmento cuyos
extremos son
el origen y el punto P.

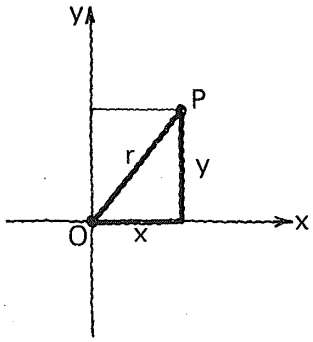


9

x es la [_____] del punto P.

y es la [_____] del punto P.

r es el [_____] del punto P.



abscisa

ordenada

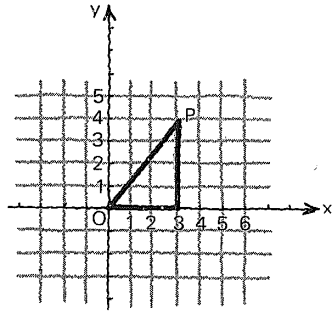
radio vector

10

La abscisa de P
es igual a [_____].

La ordenada de P
es igual a [_____].

El radio vector de P,
"de acuerdo con Pitágoras",
es igual a [_____].



3

4

$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

11

Hemos visto que
la **abscisa** y la **ordenada**
de un punto pueden ser
no negativas o **negativas**.

Convendremos en que
el **radio vector**
será **siempre no negativo**.

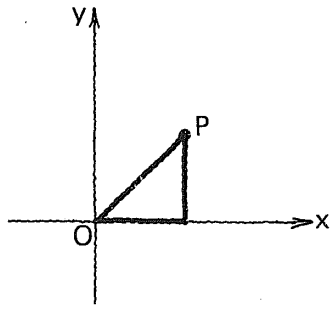
12

Si P está
en el **primer cuadrante**:

su abscisa es [_____],

su ordenada es [_____],

su radio vector es [_____].

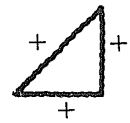


De los términos: positivo-a,
negativo-a, no positivo-a,
no negativo-a, escribir el que
corresponda para completar
proposiciones verdaderas.

positiva

positiva

positivo



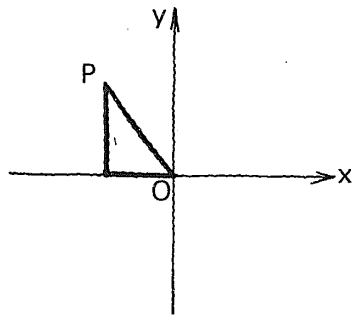
13

Si P está
en el **segundo cuadrante**:

su abscisa es [_____],

en ordenada es [_____],

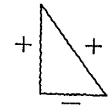
su radio vector es [_____].



negativa

positiva

positivo



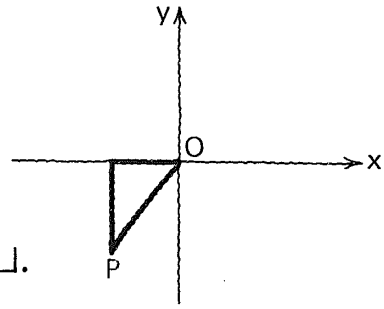
14

Si P está
en el **tercer cuadrante**:

su absicsa es [_____],

su ordenada es [_____],

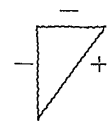
su radio vector es [_____].



negativa

negativa

positivo



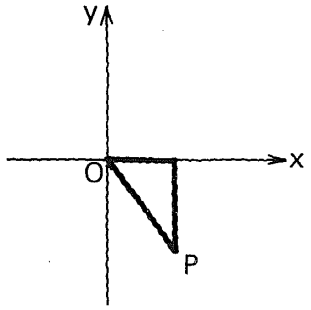
15

Si P está en el
cuarto cuadrante:

su abscisa es [ ],

su ordenada es [ ],

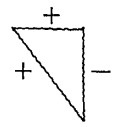
su radio vector es [ ].



positiva

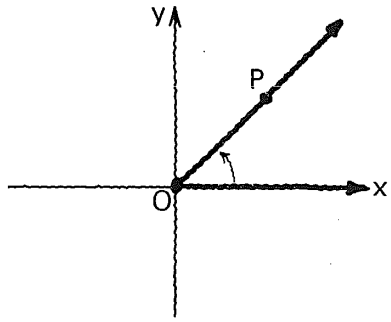
negativa

positivo



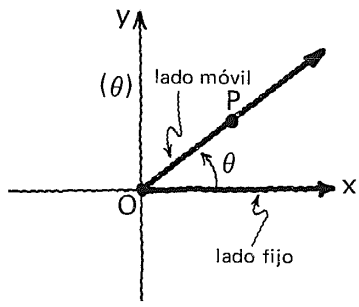
16

Consideremos, ahora,
dos rayos coincidentes,
uno de los cuales permanece
fijo en la posición $\overrightarrow{Ox}$,
y el otro gira, respecto del
origen O, en sentido
contrario al de las manecillas
del reloj, generando
ángulos como el $< xOP$.



17

Llamaremos $\overrightarrow{Ox}$
al **lado fijo** del
ángulo generado (θ)
y a $\overrightarrow{OP}$
su **lado móvil**.
Convendremos en que
un ángulo así definido
será **no negativo.**

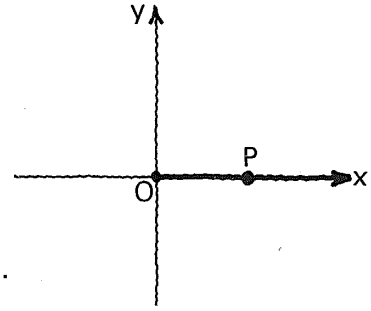


18

Cuando el lado móvil $\overrightarrow{OP}$ coincide con el fijo $\overrightarrow{Ox}$ se define un

ángulo nulo

y su medida es:
$\measuredangle\theta =$ [ ]° = [ ] radianes.



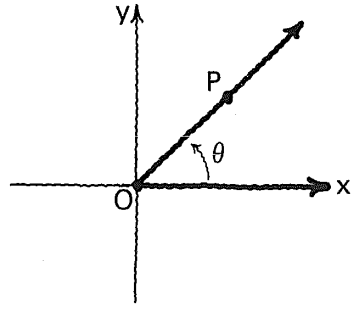
0 0

19

Si el punto P, sobre el lado móvil, está contenido en el primer cuadrante, el ángulo θ es agudo, y su medida es:

[ ]° $< \measuredangle\theta <$ [ ]°

[ ] radianes $< \measuredangle\theta <$ [ ] radianes.



0 90

0 $\pi/2$

20

Si $\overrightarrow{OP}$ coincide con $\overrightarrow{Oy}$, el ángulo θ es

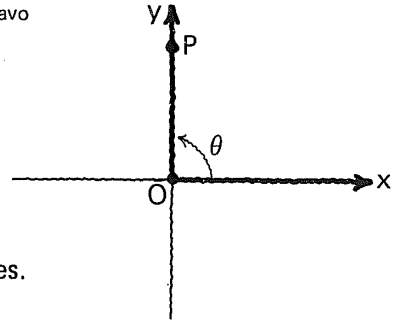
[ ]
agudo/recto/obtuso/llano/cóncavo

y su medida es:

$\measuredangle\theta =$ [ ]°

ó

$\measuredangle\theta =$ [ ] radianes.



recto

90

$\frac{\pi}{2}$

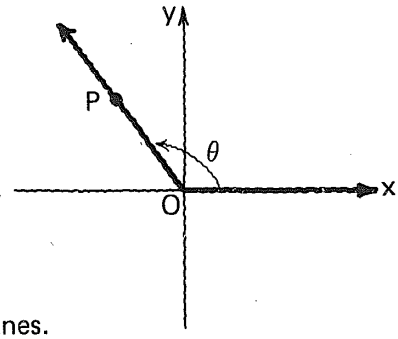
21

Si P "cae" en el segundo cuadrante,
el $<\theta$ es [_____],
y su medida quedará expresada así:

[_____] en grados,

o así:

[_____] en radianes.



obtuso

$90° < \measuredangle\theta < 180°$

$\frac{\pi}{2} < \measuredangle\theta < \pi$

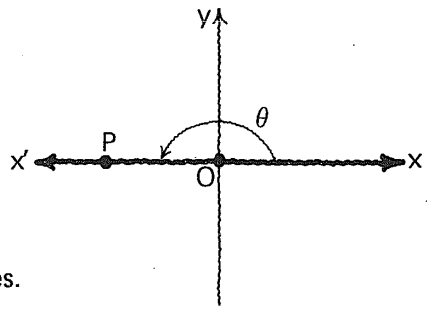
22

Si $\overrightarrow{OP}$ coincide con $\overrightarrow{Ox'}$
el $<\theta$ es [_____],
y su medida la expresamos así:

[_____] en grados,

o así:

[_____] en radianes.



llano

$\measuredangle\theta = 180°$

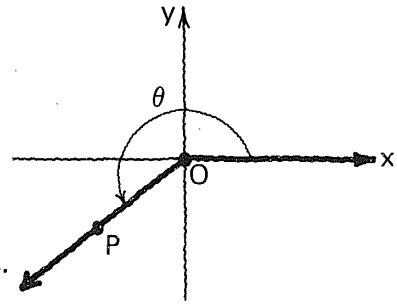
$\measuredangle\theta = \pi$

23

Si P está en el tercer cuadrante,
el $<\theta$ es [_____]
en cuyo caso:

[___] $\measuredangle\theta$ [_____] en grados,

[___] $\measuredangle\theta$ [_____] en radianes.



cóncavo

$180° < \measuredangle\theta < 270°$

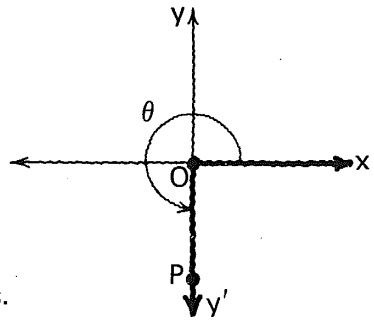
$\pi < \measuredangle\theta < \frac{3\pi}{2}$

24

Si $\overrightarrow{OP}$ coincide con $\overrightarrow{Oy'}$,
el ángulo θ
también es [ ] ,
y

$\measuredangle\theta =$ [ ] °,

$\measuredangle\theta =$ [ ] radianes.



cóncavo

270

$\frac{3\pi}{2}$

25

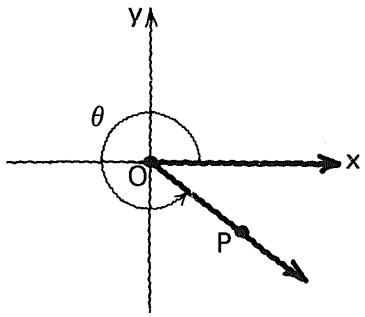
P está, ahora, en el cuarto cuadrante.

El $<\theta$ sigue siendo [ ],
y su medida la expresamos así:

[ ] en grados,

o así:

[ ] en radianes.



cóncavo

$270° < \measuredangle\theta < 360°$

$\frac{3\pi}{2} < \measuredangle\theta < 2\pi$

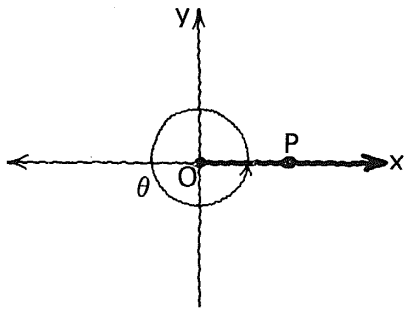
26

$\overrightarrow{OP}$ coincide nuevamente con $\overrightarrow{Ox}$
Al ángulo θ, así generado, le hemos llamado:

[ ]

$\measuredangle\theta =$ [ ] °

$\measuredangle\theta =$ [ ] radianes.



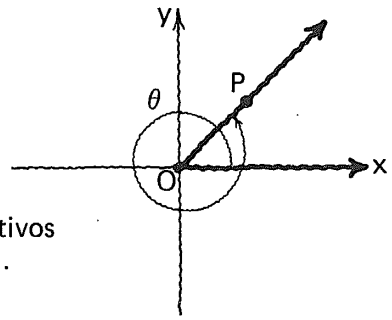
ángulo de una vuelta

360

2π

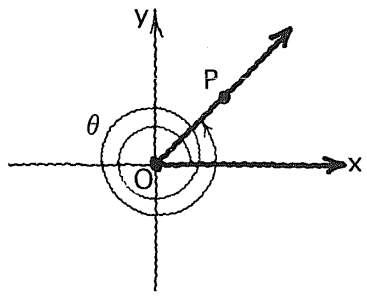
27

Nada nos impide imaginar que el lado móvil pueda seguir girando en el sentido de las manecillas del reloj, "generando ángulos positivos mayores de 360° (2π radianes).



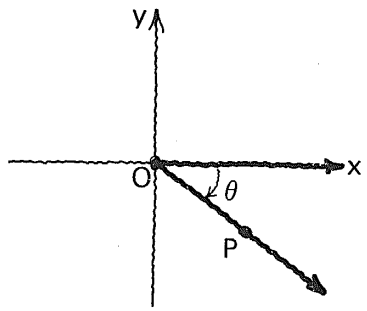
28

La medida de un ángulo así definido podrá ser cualquier **número real no negativo.**



29

Ahora, convengamos en asignarle un **número real negativo** a la medida de un ángulo "generado en el sentido de las manecillas del reloj".

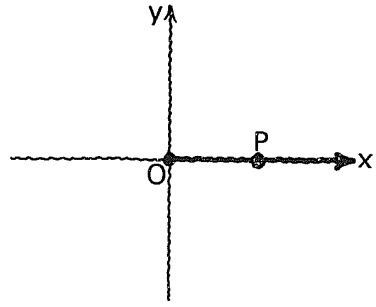


30

Veamos.

$\measuredangle\theta$ → $= \_\_\_\_\,°$.

$\measuredangle\theta$ → $= \_\_\_\_$ radianes.



0

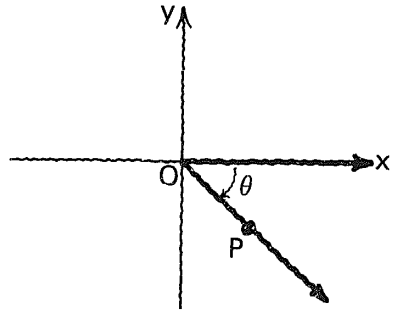
0

31

Atención.

$\_\_\_\_ < \measuredangle\theta < \_\_\_\_$

$\_\_\_\_ < \measuredangle\theta < \_\_\_\_$



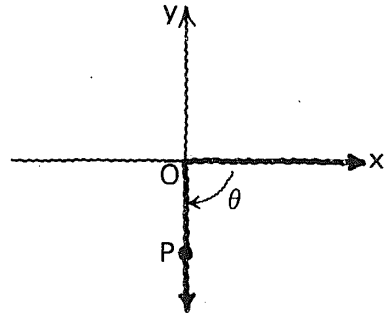
$-90° < \measuredangle\theta < 0°$

$-\frac{\pi}{2} < \measuredangle\theta < 0°$

32

$\measuredangle\theta$ → $= \_\_\_\_\,°$.

$\measuredangle\theta$ → $= \_\_\_\_$ radianes.



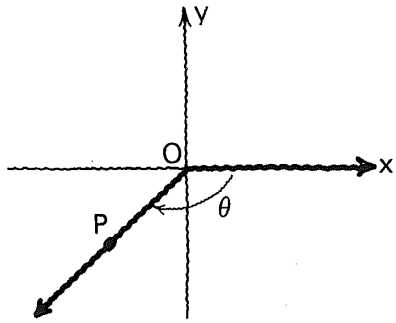
−90

$-\frac{\pi}{2}$

33

_____ en grados.

_____ en radianes.



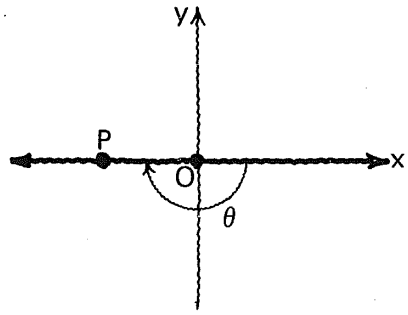
$-180° < \measuredangle\theta < -90°$

$-\pi < \measuredangle\theta < -\frac{\pi}{2}$

34

$\measuredangle\theta$ → = _____ °

$\measuredangle\theta$ → = _____ radianes.



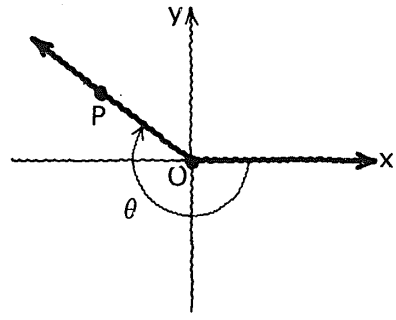
-180

$-\pi$

35

_____ en grados.

_____ en radianes.



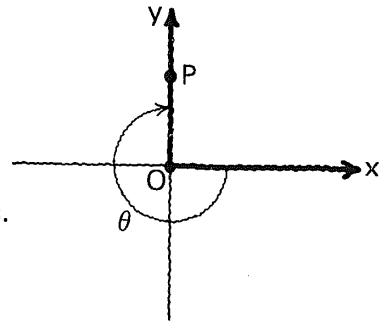
$-270° < \measuredangle\theta < -180°$

$-\frac{3\pi}{2} < \measuredangle\theta < -\pi$

36

$\measuredangle\theta$ $= \_\_\_\_\_ °$

$= \_\_\_\_\_$ radianes.



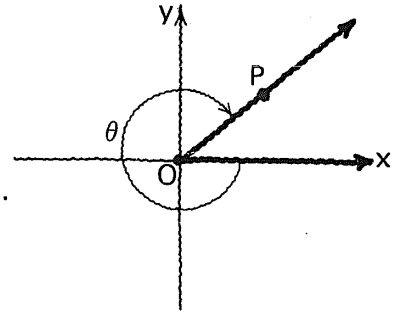
$-270°$

$-\frac{3\pi}{2}$

37

$\_\_\_\_\_$ en grados.

$\_\_\_\_\_$ en radianes.



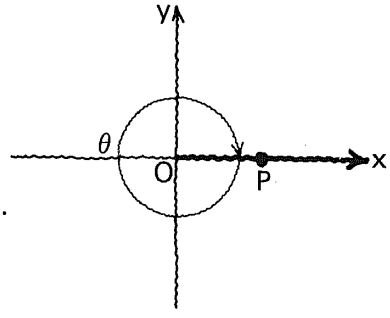
$-360° < \measuredangle\theta < -270°$

$-2\pi < \measuredangle\theta < -\frac{3\pi}{2}$

38

$\measuredangle\theta$ $= \_\_\_\_\_ °$

$= \_\_\_\_\_$ radianes.



$-360°$

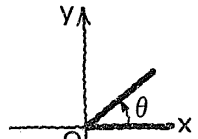
-2π

39

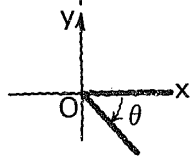
La medida de un ángulo tal como la hemos definido es, entonces, cualquier

número real:

- **positivo** $\measuredangle\theta > 0$

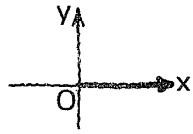


- **negativo** $\measuredangle\theta < 0$



ó

- **cero** $\measuredangle\theta = 0$



5.3.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

5.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *representar* en un sistema de ejes cartesianos un ángulo cuya medida, dada en grados o radianes, sea cualquier número real (positivo, negativo o cero).

3.2

Las
razones trigonométricas
en el
plano cartesiano

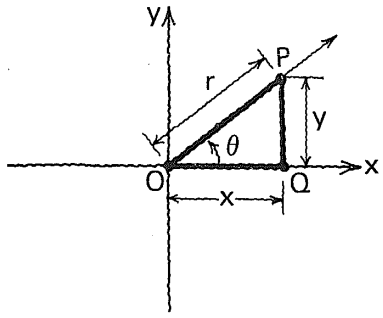
40

En el triángulo rectángulo
OPQ, en el primer cuadrante:

$$\text{sen } \theta = \frac{\quad}{\quad}$$

o bien

$$\textbf{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de P}}{\quad}$$



$\frac{y}{r}$

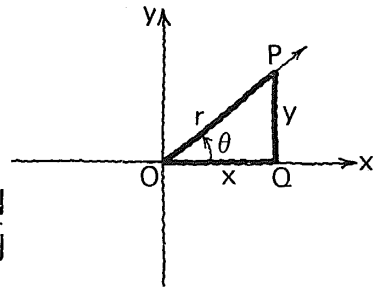
radio vector de P

41

$$\cos \theta = \frac{\quad}{\quad}$$

o bien

$$\textbf{cos } \theta = \frac{\quad}{\quad}$$



$\frac{x}{r}$

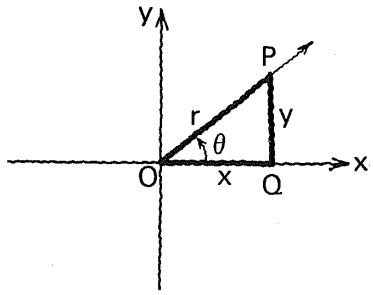
$\frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio vector de P}}$

42

$\tan\theta =$ _____

o bien

tan $\theta =$ _____



$\frac{y}{x}$

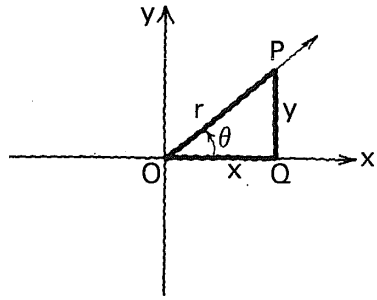
$\frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}}$

43

$\cot\theta =$ _____

o bien

cot $\theta =$ _____



$\frac{x}{y}$

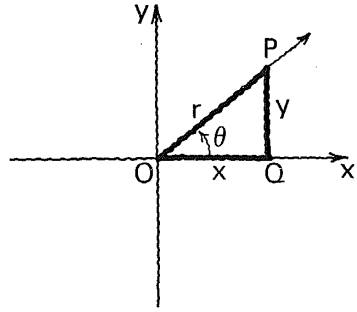
$\frac{\text{abscisa de P}}{\text{ordenada de P}}$

44

$\sec\theta =$ _____

o bien

sec $\theta =$ _____



$\frac{r}{x}$

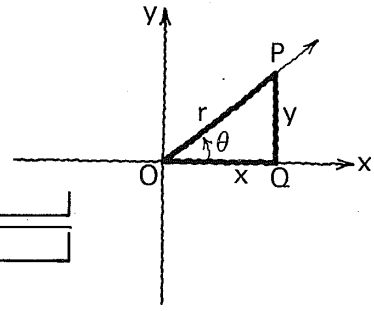
$\frac{\text{radio vector de P}}{\text{abscisa de P}}$

45

$$\text{cosec } \theta = \frac{\quad}{\quad}$$

o bien

$$\textbf{cosec } \theta = \frac{\quad}{\quad}$$



$\frac{r}{y}$

$\frac{\text{radio vector de P}}{\text{ordenada de P}}$

46

Resumiendo:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio vector de P}} = \frac{y}{r}$$

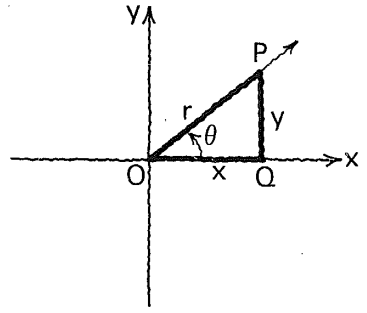
$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio vector de P}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{radio vector de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{radio vector de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{r}{y}$$



47

Adoptaremos las definiciones anteriores,
e intentaremos
hacerlas válidas
para
ángulos que tengan como medida
cualquier número real.

48

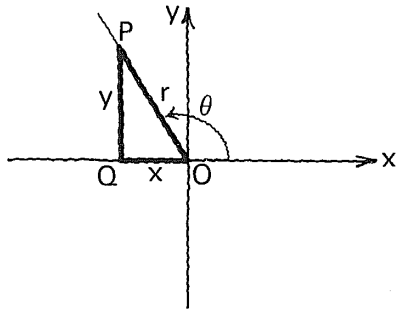
Para

$$\frac{\pi}{2} < \measuredangle\theta < \pi$$

diremos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$



49

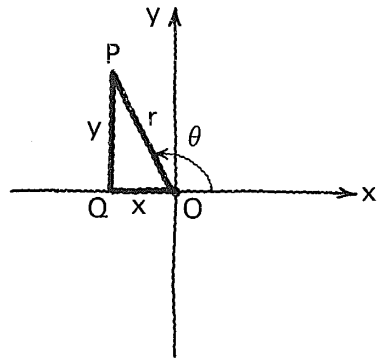
Y en forma similar:

$$\tan \theta = \frac{\square}{\square}$$

$$\cot \theta = \frac{\square}{\square}$$

$$\sec \theta = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{\square}{\square}$$



$\frac{y}{x}$

$\frac{x}{y}$

$\frac{r}{x}$

$\frac{r}{y}$

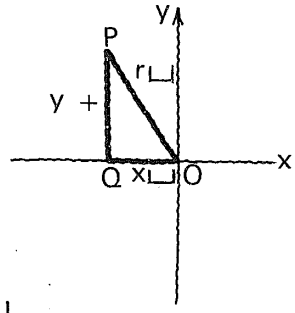
50

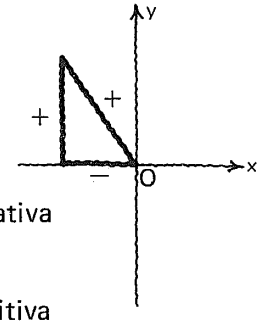
Debemos observar que, si P está en el segundo cuadrante:

su abscisa es ☐
negativa/positiva

su ordenada es ☐
negativa/positiva

y su radio vector es ☐
negativo/positivo





negativa

positiva

positivo

51

Indicar el signo que corresponda a cada una de las razones trigonométricas de θ, para $\frac{\pi}{2} < \measuredangle\theta < \pi$.

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$ ◯

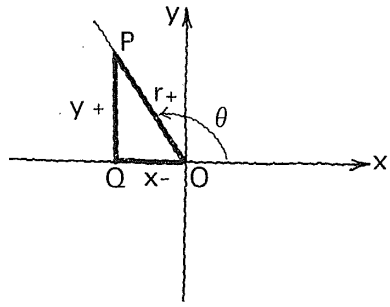
$\cos \theta = \frac{x}{r}$ ◯

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ ◯

$\cot \theta = \frac{x}{y}$ ◯

$\sec \theta = \frac{r}{x}$ ◯

$\text{cosec } \theta = \frac{r}{y}$ ◯



+

−

−

−

−

+

52

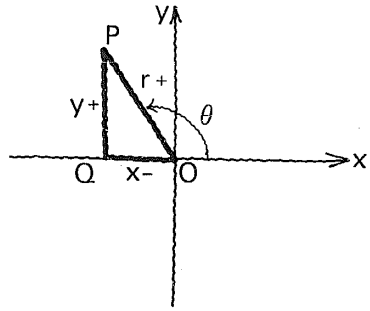
Para

$$\frac{\pi}{2} < \measuredangle\theta < \pi$$

sen θ, y su correspondiente razón recíproca

cosec θ,

son **positivas;**
todas las demás razones trigonométricas son **negativas.**

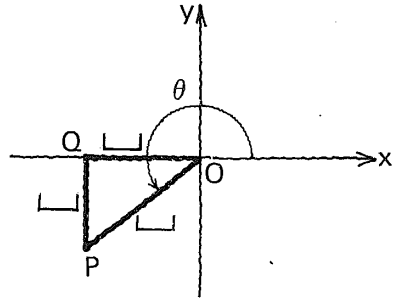


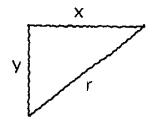
53

P en el tercer cuadrante.

$$\pi < \measuredangle\theta < \frac{3\pi}{2}$$

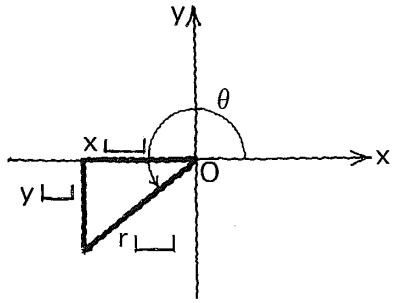
Rotular con x, y, r:
la abscisa, la ordenada y el radio vector de P.

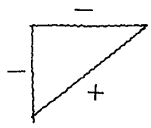




54

Indicar los signos correspondientes a **x, y y r.**





55

$$\pi < \measuredangle\theta < \frac{3\pi}{2}$$

Completar:

Signo

sen θ = $\frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio vector de P}}$ = ⌊ ⌋ ○

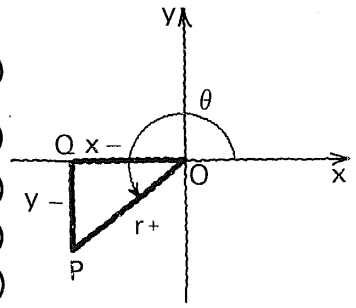
cos θ = ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋ ○

tan θ = ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋ ○

cot θ = ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋ ○

sec θ = ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋ ○

cosec θ = ⌊ ⌋ = ⌊ ⌋ ○



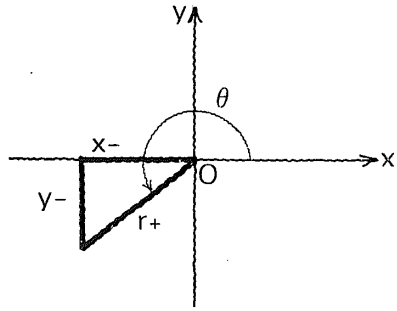
- $\frac{y}{r}$ −
- $\frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio vector de P}} = \frac{x}{r}$ −
- $\frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{y}{x}$ +
- $\frac{\text{abscisa de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{x}{y}$ +
- $\frac{\text{radio vector de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{r}{x}$ −
- $\frac{\text{radio vector de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{r}{y}$ −

56

Para

$$\pi < \measuredangle\theta < \frac{3\pi}{2}$$

⌊ ⌋ y su correspondiente razón recíproca ⌊ ⌋ son **positivas.** **Todas las demás** razones trigonométricas son **negativas.**



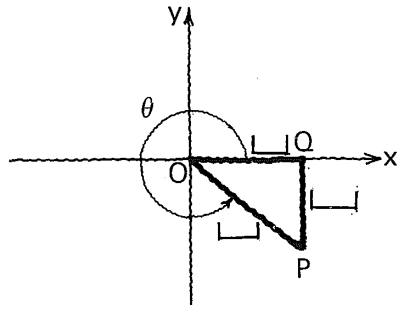
tan θ

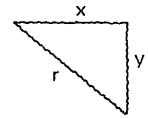
cot θ

57

P en el cuarto cuadrante.

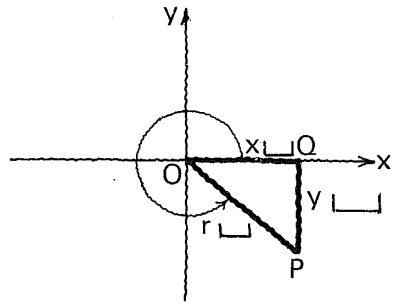
Rotular la abscisa (x),
la ordenada (y),
y
el radio vector (r)
de P.

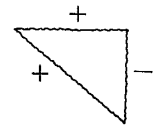




58

Indicar los signos
correspondientes.

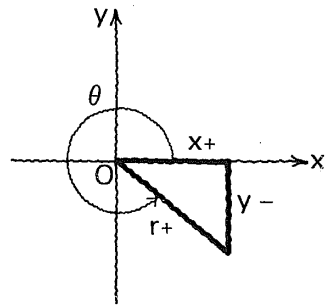




59

Para $\underline{\quad\quad} < \measuredangle\theta < \underline{\quad\quad}$

			Signo
sen θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○
cos θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○
tan θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○
cot θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○
sec θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○
cosec θ =	$\underline{\quad\quad}$	= $\underline{\quad\quad}$	○



- $\frac{3\pi}{2}$ $\quad 2\pi$
- $\frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio vector de P}} = \frac{y}{r}$ $\quad -$
- $\frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio vector de P}} = \frac{x}{r}$ $\quad +$
- $\frac{\text{ordenada de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{y}{x}$ $\quad -$
- $\frac{\text{abscisa de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{x}{y}$ $\quad -$
- $\frac{\text{radio vector de P}}{\text{abscisa de P}} = \frac{r}{x}$ $\quad +$
- $\frac{\text{radio vector de P}}{\text{ordenada de P}} = \frac{r}{y}$ $\quad -$

60

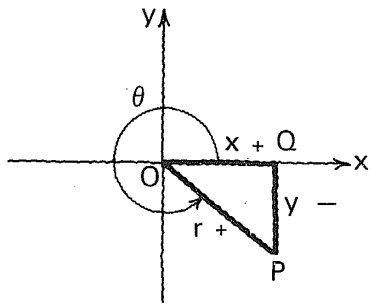
Para

$$\frac{3\pi}{2} < \measuredangle\theta < 2\pi$$

[ ] y su correspondiente razón recíproca

[ ]

son **positivas.**
Todas las demás razones trigonométricas son **negativas.**



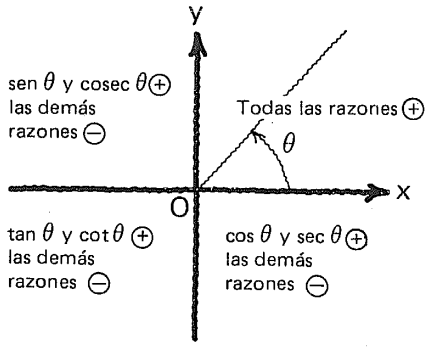
cos θ

sec θ

61

Estudiar con atención.

Resumen de los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.



62

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

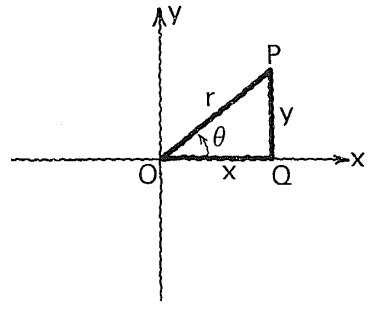
$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{r}{y}$$



Observemos que x, y, r son números [ ] (enteros/racionales/reales)
por lo tanto, las razones trigonométricas deberán ser números [ ],
por ser cocientes de números [ ]

reales

reales
reales

5.3.2.1

Práctica adicional de
aplicación de signo + o -
a la razón trigonométrica
de un ángulo, dado en grados
o radianes ($0 < \measuredangle\theta < 2\pi$),
si se considera necesario.

5.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

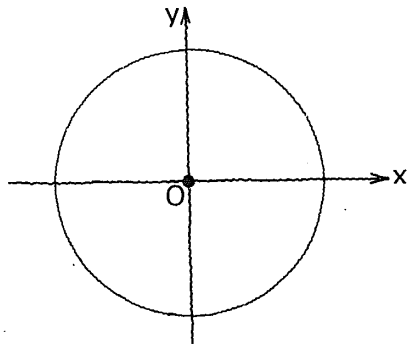
- *definir* las 6 razones trigonométricas en el plano cartesiano;
- *aplicar* el signo + o - a la razón trigonométrica de un ángulo de medida dada en grados o radianes y comprendida entre 0° y 360°.

3.3

El círculo unitario

63

Consideremos
ahora
un círculo de radio $r \in \mathbb{R}$
con centro en el origen
de
nuestro
sistema cartesiano.



64

P es un punto en la circunferencia, y
x e **y** son sus coordenadas.

De acuerdo con las definiciones adoptadas:

sen θ = $\frac{y}{r}$

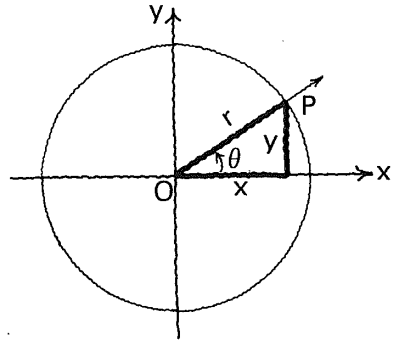
cos θ = $\frac{x}{r}$

tan θ = $\frac{y}{x}$

cot θ = $\frac{x}{y}$

sec θ = $\frac{r}{x}$

cosec θ = $\frac{r}{y}$



65

Atención.

Observemos lo que pasa si hacemos que el radio del círculo tenga la unidad como medida.

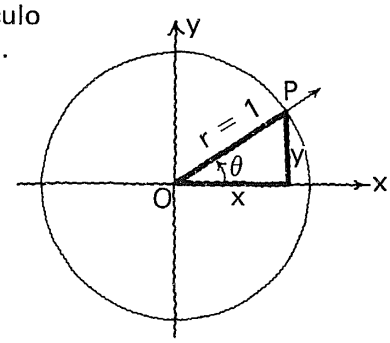
$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$;

pero, como r = 1

$\text{sen } \theta = \frac{y}{1}$

o bien,

sen θ = y.

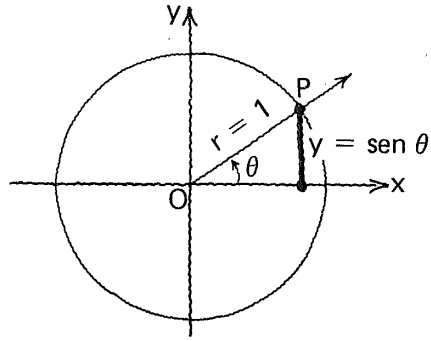


66

En este círculo, de radio unitario
(o círculo unitario),

sen θ $(0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$

es igual a **y**,
es decir, a la **ordenada de P.**

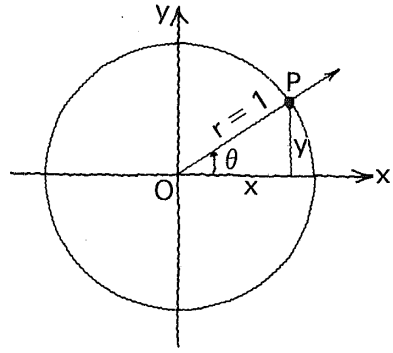


67

Similarmente,

$\cos \theta =$ _____

puesto que



x

$\cos \theta = \frac{x}{r}$

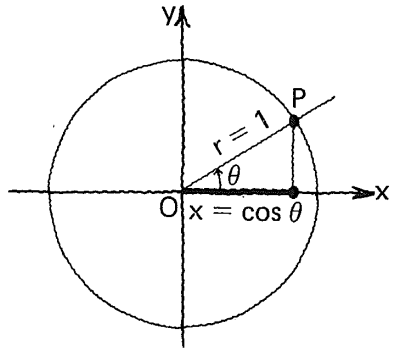
y r = 1
entonces,
$\cos \theta = x/1 = x$

68

En el círculo unitario,

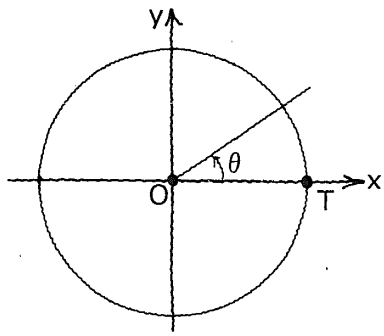
cos θ $\quad (0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$

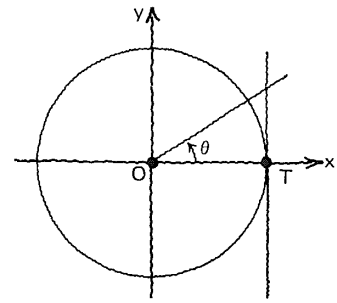
es igual a **x**
la **abscisa de P.**



69

Ahora,
por el punto T
(intersección de la $\overrightarrow{\ }$
circunferencia con Ox)
tracemos una tangente
al círculo,
la cual debe ser,
como sabemos, $\overleftrightarrow{\ }$
perpendicular a Ox.

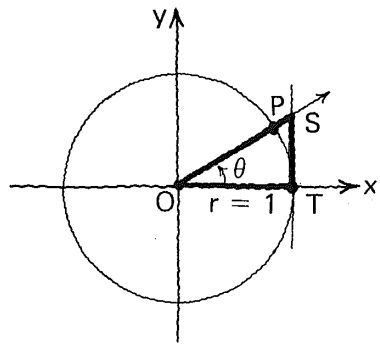




70

S es el punto de intersección
de esta tangente y el lado
móvil del $<\theta$.
En el triángulo rectángulo OTS:

$$\tan\theta = \frac{\square}{\square}.$$



$$\frac{|\overline{TS}|}{|\overline{OT}|}$$

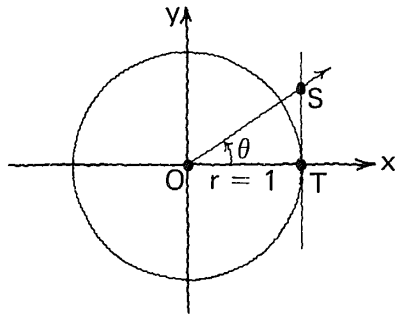
71

Hemos encontrado que:

$$\tan\theta = \frac{|\overrightarrow{TS}|}{|\overrightarrow{OT}|}$$

pero, como $|\overrightarrow{OT}| = r = 1$,

$\tan\theta =$ [_____] .



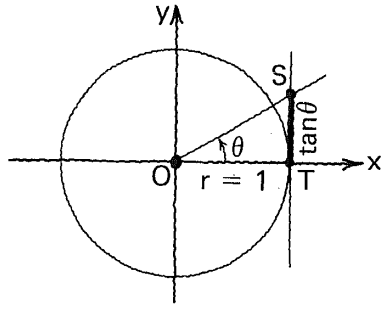
$|\overrightarrow{TS}|$

72

En el círculo unitario,

tan θ $(0 < \measuredangle\, \theta < \pi/2)$

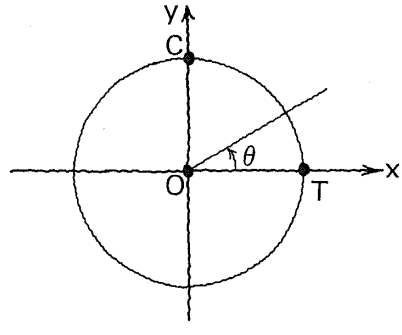
es igual a $|\overrightarrow{TS}|$.

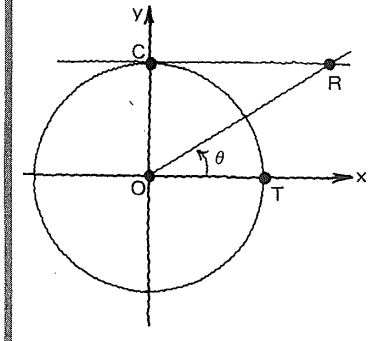


73

Por el punto C
(intersección de la circunferencia con $\overleftrightarrow{Oy}$)
tracemos una tangente al círculo,
la cual debe ser
perpendicular a [_____]

Rotulemos con R
el punto de intersección de esta tangente con el lado móvil del $<\theta$.





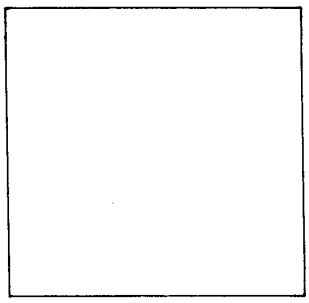
• $\overleftrightarrow{Oy}$

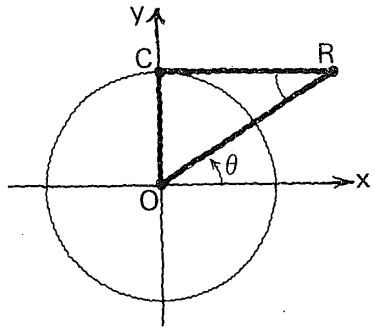
74

En el triángulo rectángulo OCR

$\measuredangle CRO = \measuredangle\theta$

porque:





$\overleftrightarrow{CR} \perp \overleftrightarrow{Oy}$

$\overleftrightarrow{Ox} \perp \overleftrightarrow{Oy}$

por lo tanto:

$\overleftrightarrow{CR} \parallel \overleftrightarrow{Ox}$

y

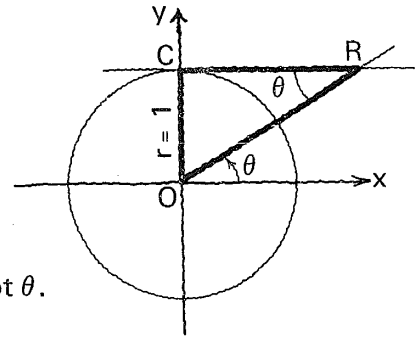
$\overleftrightarrow{OR}$ es una transversal entonces

$\measuredangle CRO = \measuredangle\theta$ porque son alternos internos

75

En el $\triangle$ rectángulo OCR:

$\cot \measuredangle CRO = \frac{\square}{\square} = \cot\theta.$



$\frac{|\overrightarrow{CR}|}{|\overrightarrow{OC}|}$

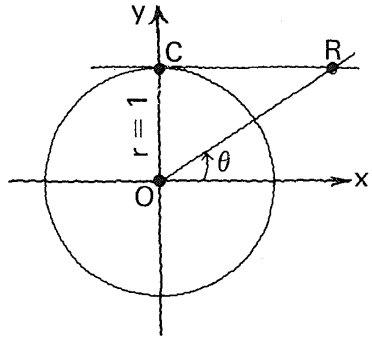
76

$\cot\theta = \frac{|\overrightarrow{CR}|}{|\overrightarrow{OC}|}$

y $|\overrightarrow{OC}| = \square$

de donde:

$\cot\theta = \square$



$r = 1$

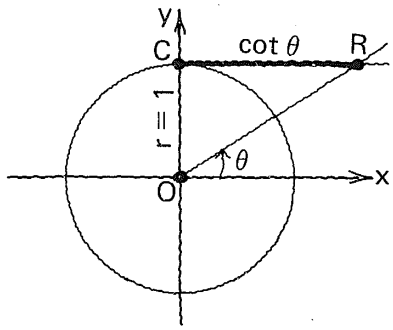
$|\overrightarrow{CR}|$

77

En el círculo unitario,

$\cot\theta \quad (0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$

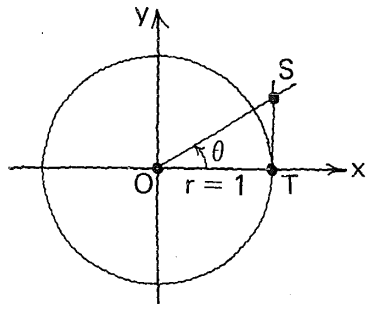
es
igual a $|\overrightarrow{CR}|$.



78

En el triángulo rectángulo OTS:

$\sec\theta = \dfrac{\square}{\square}$



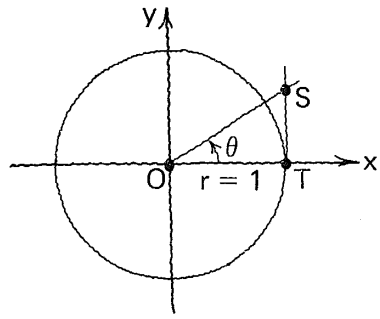
$\dfrac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OT}|}$

79

$\sec\theta = \dfrac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OT}|}$

y como $|\overrightarrow{OT}| = \square$,
entonces:

$\sec\theta = \square$.



$r = 1$

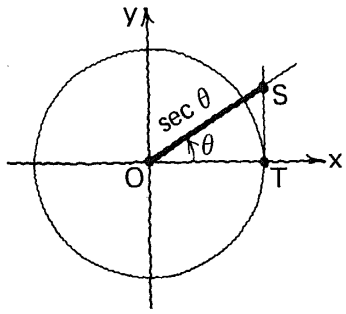
$|\overrightarrow{OS}|$

80

En el círculo unitario,

$\sec\theta \quad (0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$

es igual a $\overrightarrow{|OS|}$

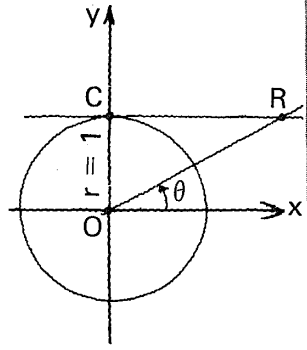


81

En el triángulo rectángulo OCR:

$\text{cosec} < \text{CRO} = \frac{\square}{\square} = \text{cosec} < \theta,$

puesto que $\measuredangle$ CRO $= \measuredangle\theta$.



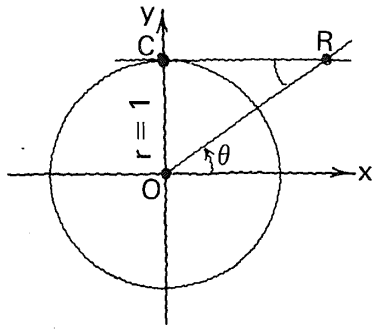
$\frac{\overrightarrow{|OR|}}{\overrightarrow{|OC|}}$

82

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\overrightarrow{|OR|}}{\overrightarrow{|OC|}}$

y como $\overrightarrow{|OC|} = \square$
entonces:

$\text{cosec}\,\theta = \square.$



r = 1

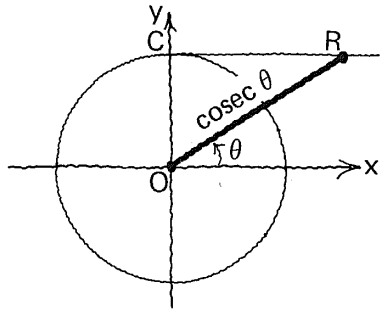
$\overrightarrow{|OR|}$

83

En el círculo unitario:

cosec θ $\quad (0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$

es igual a $|\overline{OR}|$.

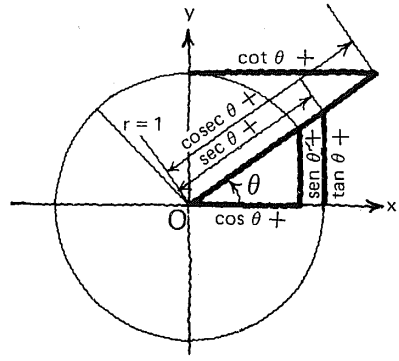


84

Estudiar con atención este esquema-resumen.

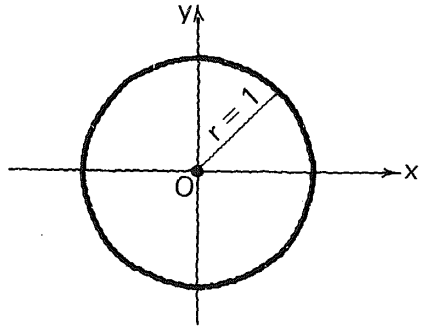
Las medidas de todos estos segmentos se considerarán positivas.

Las razones trigonométricas de θ en el círculo unitario, cuando el lado móvil del ángulo θ cae **en el primer cuadrante.**



85

La consideración de este círculo unitario nos ha permitido definir las razones trigonométricas de un ángulo θ $(0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$ como medidas de segmentos rectilíneos.



86

El siguiente paso
consistirá en
generalizar estas definiciones
para hacerlas aplicables
a
ángulos de cualquier medida
(positivos, negativos o nulos).

5.3.3.1

Práctica adicional de
representación de las razones
trigonométricas para un ángulo θ
$(0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$
como segmentos rectilíneos
en el círculo unitario,
si se considera necesario.

5.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

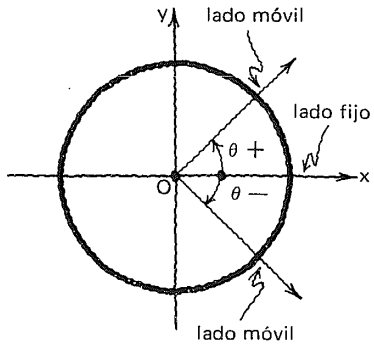
- *representar* en el círculo unitario las razones trigonométricas de un ángulo dado θ $(0 < \measuredangle\theta < \pi/2)$ como segmentos rectilíneos.

3.4

Representación de
ángulos en el círculo unitario

87

La generación de ángulos
positivos o negativos
en el círculo unitario
se hará de acuerdo con
el criterio
que hemos establecido.



88

Atención.

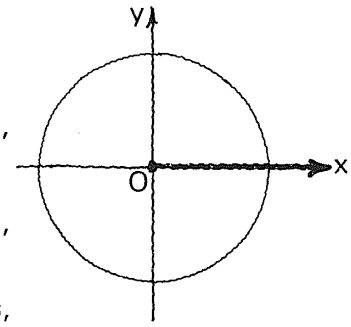
Cuando el lado móvil
coincide
con el lado fijo;

$\measuredangle\theta$ = ⌊____⌋ ° = ⌊____⌋ radianes,
o bien:

$\measuredangle\theta$ = ⌊____⌋ ° = ⌊____⌋ radianes,
o bien:

$\measuredangle\theta$ = ⌊____⌋ ° = ⌊____⌋ radianes,

y así sucesivamente.

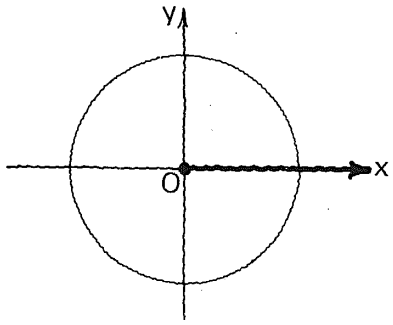


0	0
360	2π
720	4π

89

Cuando
el lado móvil
coincide
con el lado fijo,
la medida del ángulo
formado es, en general,
igual a:
$360\,k°$ $(k \in \mathbb{N})$
y en radianes:

[_____] [_____]



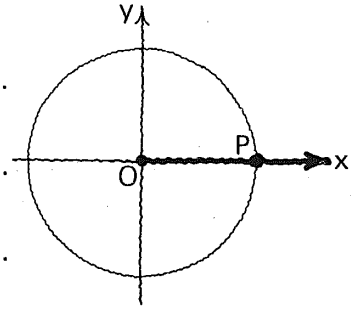
$2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

90

Si el lado móvil coincide con el lado fijo:

$\measuredangle\theta = 360\,k° = 2k\pi$ **radianes.**

Si k = 0:
$\measuredangle\theta =$ [___] ° = [___] radianes.
Si k = 1
$\measuredangle\theta =$ [___] ° = [___] radianes.
Si k = 2
$\measuredangle\theta =$ [___] ° = [___] radianes.
Si k = 3
$\measuredangle\theta =$ [___] ° = [___] radianes.
Si k = 4 ... etcétera.

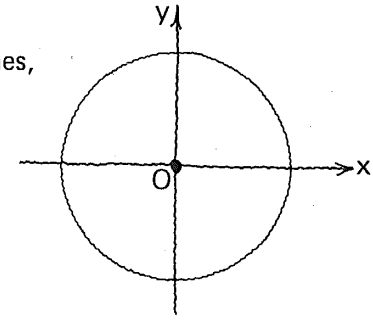


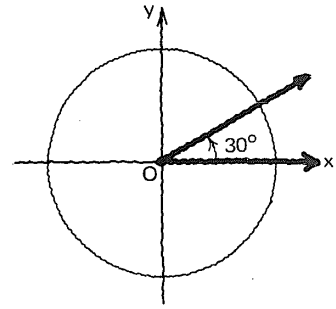
0	0
360	2π
720	4π
1080	6π

91

Si $\measuredangle\theta = 30°$ = [_____] radianes,
el lado móvil se
encuentra en
el [_____] cuadrante.

Representar este ángulo
en forma aproximada.





- $\pi/6$
- primer

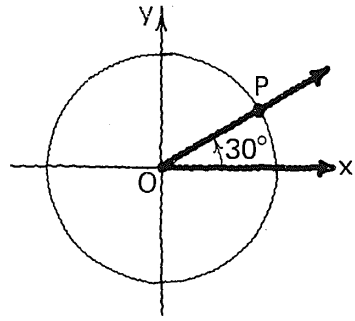
92

Observemos que
para un ángulo de **390°**
(30° + 360°)

o de ⌊_____⌋ radianes

(⌊_____⌋ + ⌊_____⌋)

el lado móvil ocupa la misma posición que para un ángulo de 30° ($\frac{\pi}{6}$ radianes).

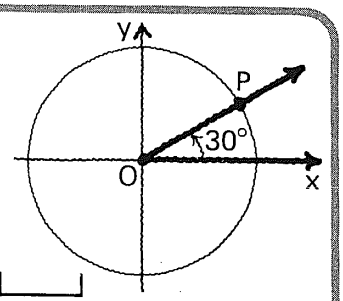


$\frac{13\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi$

93

Para los ángulos de todas estas medidas (en grados) el lado móvil ocupa la misma posición que para un ángulo de 30°.



30° + ⌊__⌋ × 360° = 30° + ⌊__⌋ = ⌊____⌋

30° + ⌊__⌋ × 360° = 30° + ⌊__⌋ = ⌊____⌋

30° + ⌊__⌋ × 360° = 30° + ⌊__⌋ = ⌊____⌋

30° + ⌊__⌋ × 360° = 30° + ⌊__⌋ = ⌊____⌋

↓

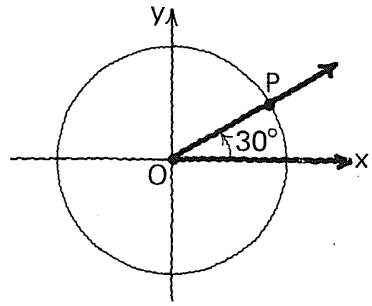
etcétera.

- 30° + 1 × 360° = 30° + 360° = 390°
- 30° + 2 × 360° = 30° + 720° = 750°
- 30° + 3 × 360° = 30° + 1080° = 1110°
- 30° + 4 × 360° = 30° + 1440° = 1470°

94

El lado móvil ocupará la misma posición que para un ángulo de 30°, para los ángulos de las siguientes medidas:

30° + 360 k° (k ∈ ℕ)



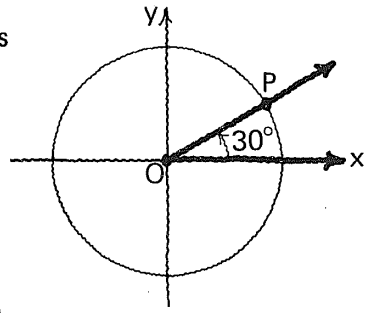
95

El lado móvil ocupará
la misma posición
que para un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes

para los ángulos
de las siguientes medidas:

$\frac{\pi}{6} + \square \cdot 2\pi$

$\frac{\pi}{6} + \square$ ($\square$)



k

$2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$)

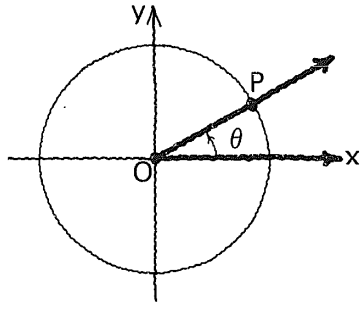
96

Generalizando un poco más;
si θ es un ángulo tal que

$0° \leqslant \measuredangle\theta \leqslant 90°$
ó
$0° \leqslant \measuredangle\theta \leqslant \pi/2$

el lado móvil ocupará la
misma posición para los
ángulos del conjunto:

$\{ (\theta + 360\ k) \}$ en grados
o
$\{ \square \}$ en radianes



$k \in \mathbb{N}$

$(\theta + 2k\pi)$

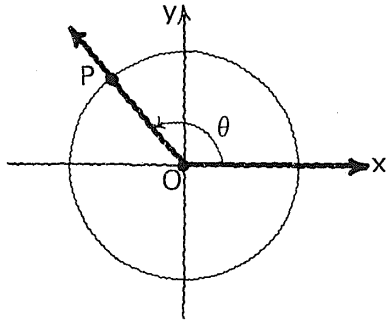
97

Con un poco de atención
podemos darnos
cuenta de que
lo anterior
puede
generalizarse
para
cualquier ángulo θ,
tal que:

$0° \leqslant \measuredangle\theta < 360°$

o

$0 \leqslant \measuredangle\theta < 2\pi.$



98

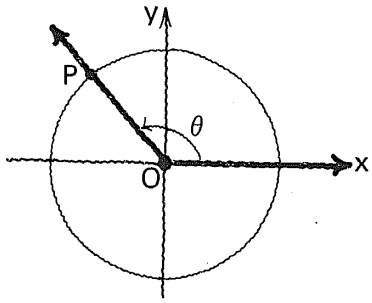
Por ejemplo,

si $\measuredangle\theta = 120°$ (____ radianes)

el lado móvil ocupará la misma posición para los ángulos de las siguientes medidas:

en grados	en radianes
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____

↓ etcétera.



- $\frac{2\pi}{3}$
- 120° $\frac{2\pi}{3}$
- 480° $\frac{8\pi}{3}$
- 840° $\frac{14\pi}{3}$
- 1200° $\frac{20\pi}{3}$
- 1560° $\frac{26\pi}{3}$

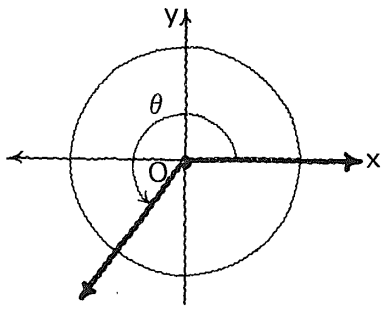
99

Si $\measuredangle\theta = 225°$ (____ radianes)

el lado móvil ocupará la misma posición para los ángulos de las siguientes medidas:

en grados	en radianes
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____

etcétera.



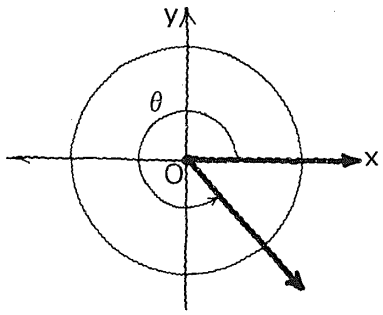
- $\frac{5\pi}{4}$
- 225° $\frac{5\pi}{4}$
- 585° $\frac{13\pi}{4}$
- 945° $\frac{21\pi}{4}$
- 1305° $\frac{29\pi}{4}$
- 1665° $\frac{37\pi}{4}$

100

Si $\measuredangle\theta = 310°$ (____ radianes)

el lado móvil ocupará la misma posición para los ángulos de las siguientes medidas:

en grados	en radianes
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____
____	= ____



- $\frac{31\pi}{18}$
- 310° $\frac{31\pi}{18}$
- 670° $\frac{67\pi}{18}$
- 1030° $\frac{103\pi}{18}$
- 1390° $\frac{139\pi}{18}$
- 1750° $\frac{175\pi}{18}$

101

Hemos aceptado, pues, la igualdad de posición del lado móvil para los ángulos del conjunto:

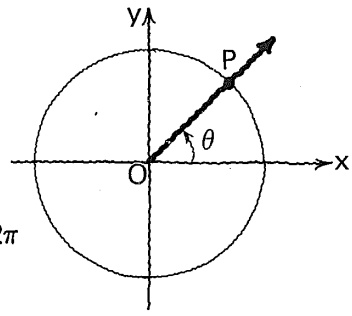
$\{(\theta + \mathbf{360k})\}$ ó $\{(\theta + \mathbf{2k\pi})\}$
en grados en radianes

cuando

$\mathbf{0^\circ} \leqslant \measuredangle\theta < \mathbf{360^\circ}$ ó $\mathbf{0} \leqslant \measuredangle\theta < \mathbf{2\pi}$

y

☞ $k \in \mathbb{N}$



102

En

$\{(\theta + 360k)\}$ ó $\{(\theta + 2k\pi)\}$

veamos lo que pasa si

☞ $k \in \mathbb{Z}^-$

103

Consideremos el ángulo θ, tal que

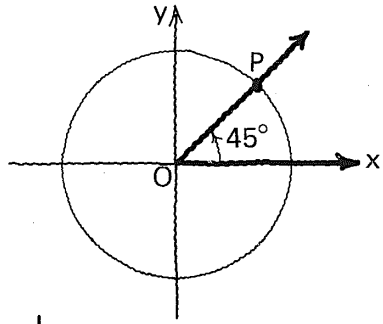
$\measuredangle\theta = 45^\circ$

En $\theta + \mathbf{360k}$,

si $k = -1$

obtenemos

$\square = \square$

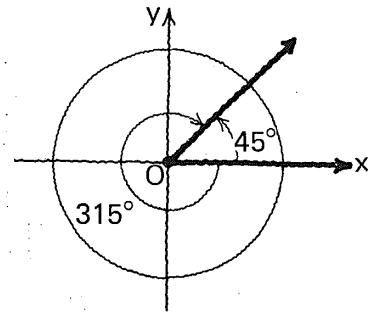


$45^\circ + (-360)$

$45^\circ - 360^\circ = -315^\circ$

104

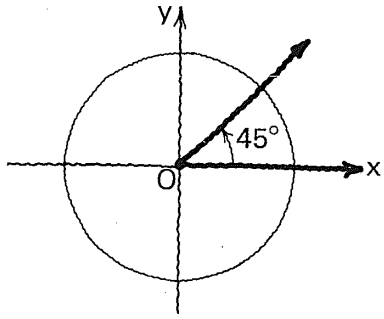
Observemos que,
para un ángulo de $-315°$
(de acuerdo con nuestra
convención adoptada),
el lado móvil ocupa
precisamente
la posición que le corresponde
a un ángulo de **45°**.



105

Si k = −2, y $\measuredangle\theta = 45°$
la expresión θ + **360k°**
toma el valor:

_____ ° = _____ °



$45° + (-360 \times 2)$

$45° - 720° = -675°$

106

45° = _____ radianes.

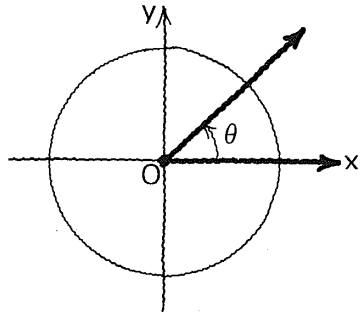
Si k = −1
la expresión θ + **2k**π
adquiere el valor:

_____

Si k = −2
la expresión θ + **2k**π
adquiere el valor:

_____

y así sucesivamente.



$\frac{\pi}{4}$

$-\frac{7\pi}{4}$

$-\frac{15\pi}{4}$

107

Podemos observar
que las expresiones:

$\theta + 360k$ en grados,

y

$\theta + 2k\pi$ en radianes

se verifican para

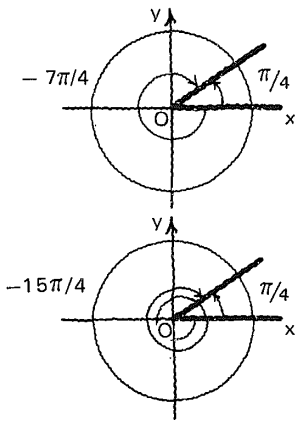
$0° \leqslant \measuredangle\theta < 360°$

o

$0 \leqslant \measuredangle\theta < 2\pi$

y

$k \in \mathbb{Z}$.



108

Llevando el asunto más lejos,
veamos si las expresiones

$\theta + 360k$ y $\theta + 2k\pi$

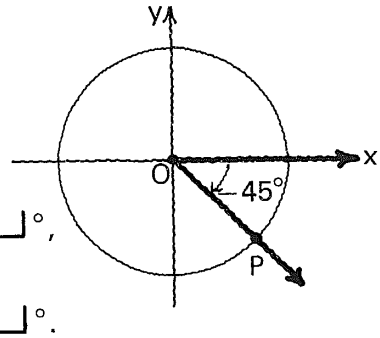
se verifican
para $\measuredangle\theta < 0$.

109

Por ejemplo:
si $\measuredangle\theta = -45°$
la expresión

$\theta + 360k°$

para k = 1
adquiere el valor [ ]°,
y
para k = −1
adquiere el valor [ ]°.



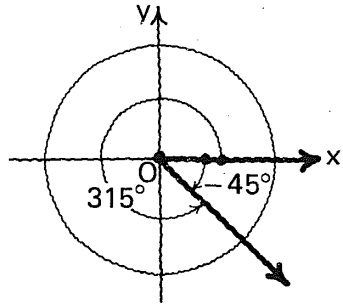
315

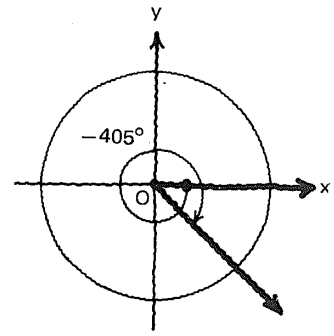
−405

110

Observemos que:
para los ángulos
de $-45°$, $315°$ y $-405°$,
el lado móvil
ocupa la misma posición.

Indicar el ángulo $-405°$.





111

Generalizando, (si la unidad de medida angular utilizada es el grado) podemos decir que:
el lado móvil ocupará la misma posición para todos los ángulos del conjunto:

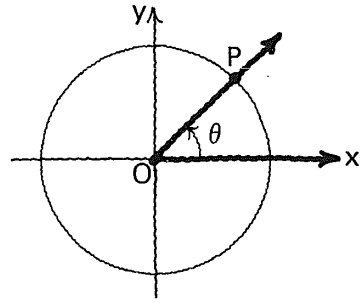
$\{(\theta + \mathbf{360k})°\}$

para $\mathbf{0°} \leqslant \measuredangle\theta < 360°$

o bien

para $\mathbf{-360°} < \measuredangle\theta \leqslant \mathbf{0°}$

y $k \in \mathbb{Z}$



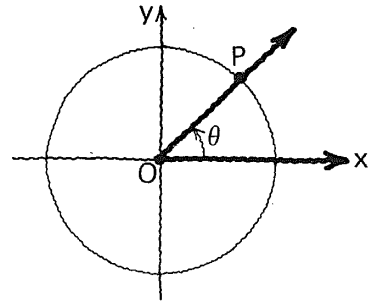
112

Si la unidad de medida angular empleada es el radián, el lado móvil ocupará la misma posición para todos los ángulos del conjunto [ ]

para [ ]

o bien para [ ]

y [ ]



$\{(\theta + 2k\pi)\}$

$0 \leqslant \measuredangle\theta < 2\pi$

$-2\pi < \measuredangle\theta \leqslant 0$

$k \in \mathbb{Z}$

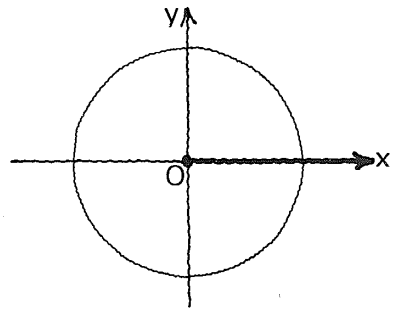
113

Atención.

Esta es la representación de un ángulo θ cuya medida en grados es alguno de los elementos del conjunto

$\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = 360k\}^* \; k \in \mathbb{Z}$ por comprensión

$\{0, \pm 360°, \pm 720°, \ldots\}$ por extensión



o cuya medida en radianes es alguno de los elementos del conjunto

$\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = 2k\pi\}\; k \in \mathbb{Z}$ por comprensión ↗

$\{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots\}$ por extensión ↗

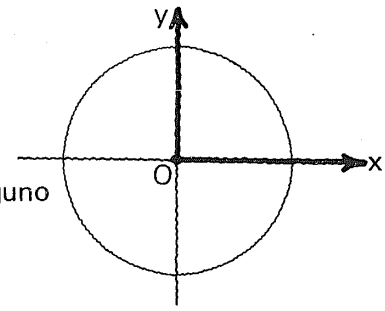
* A partir de este momento, utilizaremos el símbolo θ (o cualquier otra literal) para designar, indistintamente, a un ángulo o a su medida.

114

Esta es la representación de un ángulo θ cuya medida, en grados, es alguno de los elementos del conjunto

_____ por comprensión

_____ por extensión



o cuya medida en radianes es alguno de los elementos del conjunto

_____ por comprensión

_____ por extensión

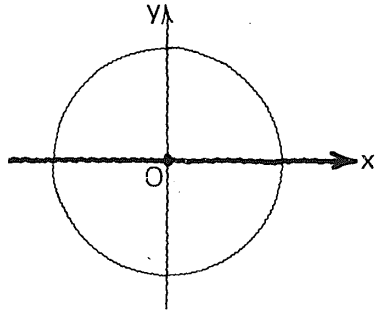
- $\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = 90° + 360°k\}\; k \in \mathbb{Z}$
- $\{\ldots, -270°, 90°, 450°, \ldots\}$
- $\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}\; k \in \mathbb{Z}$
- $\{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\}$

115

Esta es la representación de un ángulo θ cuya medida en grados es alguno de los elementos del conjunto

_____

ó _____



o cuya medida en radianes es alguno de los elementos del conjunto

_____

ó _____

$\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = 180° + 360°k\}\; k \in \mathbb{Z}$

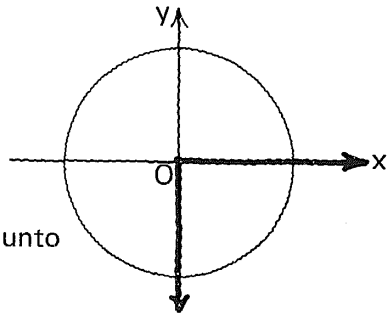
$\{\ldots, -540°, -180°, 180°, \ldots\}$

$\{\theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = \pi + 2k\pi\}\; k \in \mathbb{Z}$

$\{\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots\}$

116

Esta es la representación de un ángulo θ, cuya medida, en grados, es alguno de los elementos del conjunto



_____
por comprensión

_____
por extensión

o cuya medida, en radianes, es alguno de los elementos del conjunto

_____
por comprensión

_____
por extensión

$\{ \theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = 270° + 360°k \}$
$k \in \mathbb{Z}$

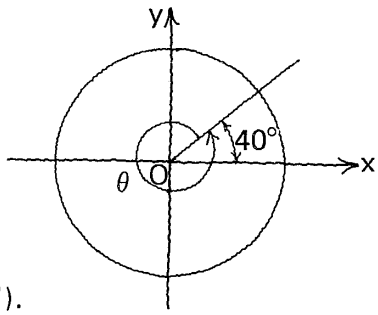
$\{ \ldots, -90°, 270°, 630°, \ldots \}$

$\{ \theta/\theta \in \mathbb{R} \wedge \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \}$
$k \in \mathbb{Z}$

$\{ \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots \}$

117

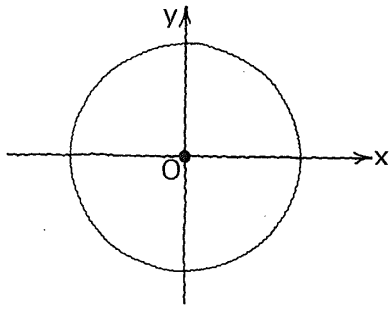
Ahora bien, el lado móvil de un ángulo de 400°, por ejemplo, "cae" en el primer cuadrante.
La medida de un ángulo de 400° está comprendida entre 360° y 450° (360° + 90°).



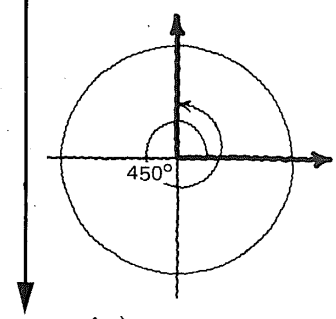
118

El lado móvil de un ángulo de 450° cae

_____



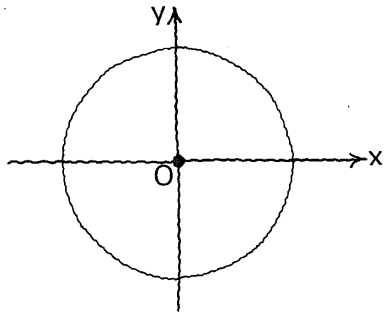
$450° - 360° = 90°$



- sobre $\overrightarrow{OY}$, entre el primer y segundo cuadrante.

119

El lado móvil de un ángulo de 510° cae en

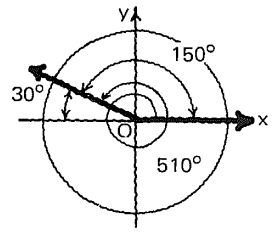


Observar con atención.

1 vuelta

360 | 510

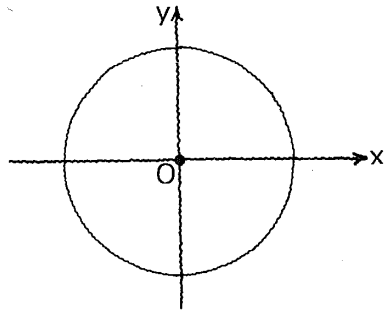
150 = 180 − 30



● el segundo cuadrante

120

El lado móvil de un ángulo de 540° cae

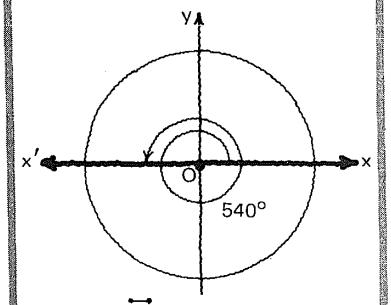


Observar con atención.

1 vuelta

360 | 540

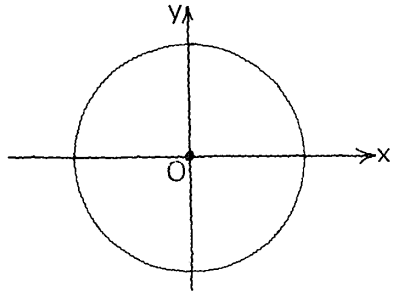
180



● sobre Ox' (entre el segundo y el tercer cuadrantes)

121

El lado móvil de un ángulo de 570° cae en

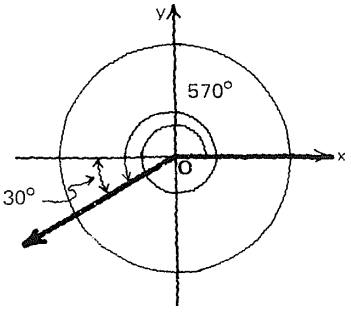


Observar con atención.

1 vuelta

360 | 570

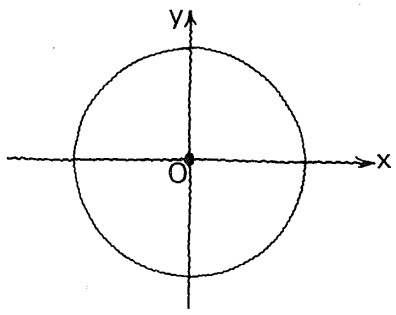
210 = 180 + 30



● el tercer cuadrante.

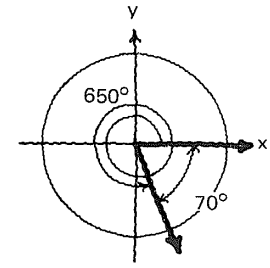
122

El lado móvil de un ángulo de 650° cae en



Observar con atención.

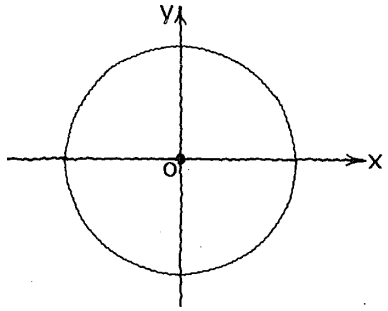
$$\begin{array}{r|l} & \text{1 vuelta} \\ 360 & 650 \\ & 290 = 360 - 70 \end{array}$$



● el cuarto cuadrante

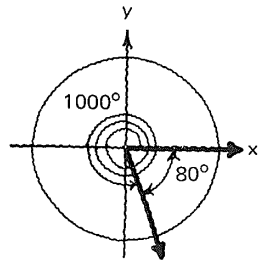
123

El lado móvil de un ángulo de 1000° cae en



Observar con atención.

$$\begin{array}{r|l} & \text{2 vueltas} \\ 360 & 1000 \\ & 280 = 360 - 80 \end{array}$$

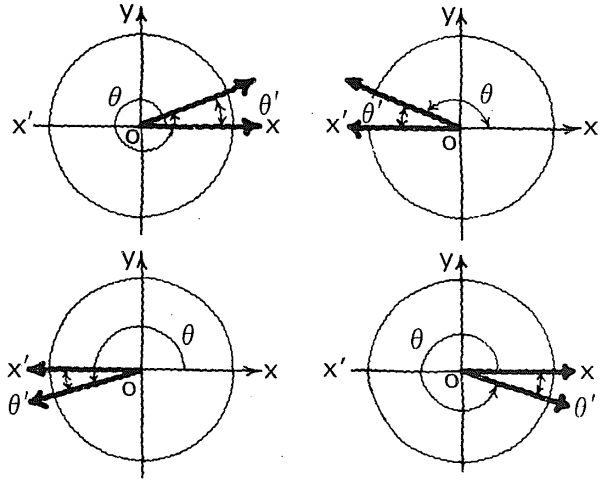


● el cuarto cuadrante

124

Observar con mucha atención.

Hemos determinado, en conexión con un ángulo cualquiera θ, un *ángulo agudo* θ' que llamaremos **ángulo de referencia**, formado por el lado móvil de θ y $\overrightarrow{Ox}$ u $\overrightarrow{Ox'}$.



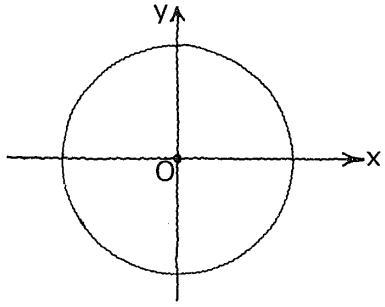
125

El lado móvil
de un ángulo de 1250°
cae en

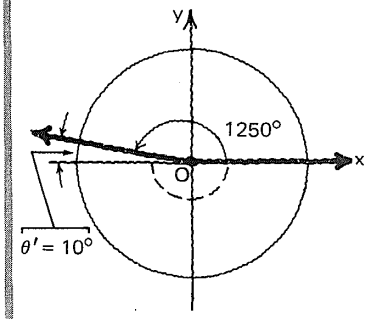
[ ].

Medida
del ángulo de referencia:

$\theta' =$ [ ]



3 vueltas
360 | 1250
170 = 180 − 10



- el segundo cuadrante
- 10°

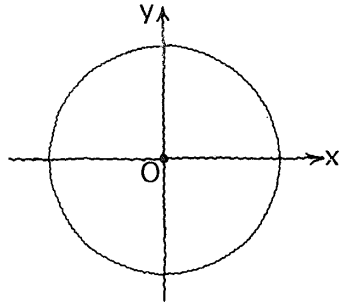
126

El lado móvil
de un ángulo de 2000°
cae en

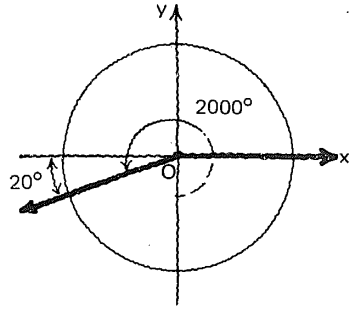
[ ].

Medida del
ángulo de referencia:

$\theta' =$ [ ]



5 vueltas
360 | 2000
200 = 180 + 20



- el tercer cuadrante
- 20°

5.3.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

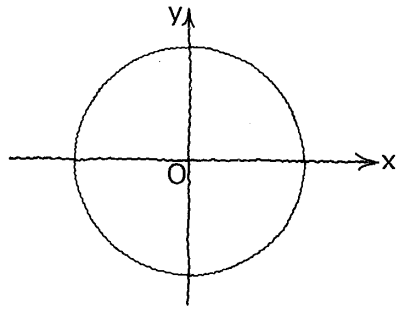
127

El lado móvil
de un ángulo de 7π radianes
cae

[ ].

Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ [ ]

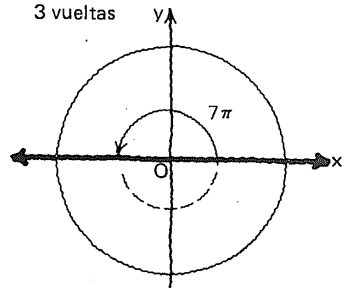


Observar con atención.

$7\pi = 6\pi + \pi$

↓

3 vueltas



- entre el segundo y el tercer cuadrantes
- 0

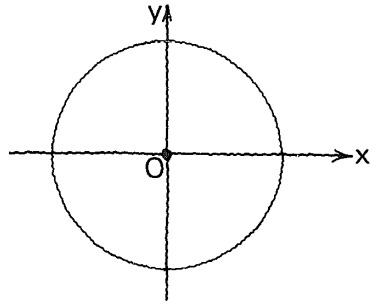
128

El lado móvil
de un ángulo de 8π radianes
cae

[ ].

Medida del ángulo
de referencia:

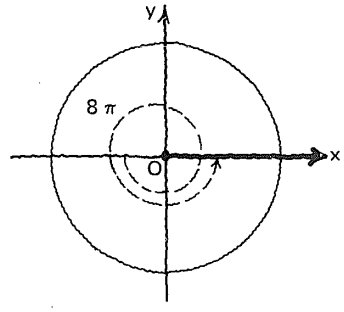
$\theta' =$ [ ]



8π

↓

4 vueltas



- entre el cuarto y el primer cuadrantes
- 0

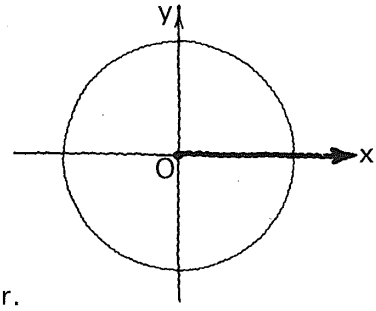
129

Esta es
la representación de un
ángulo cuya medida
es igual a

un múltiplo par de π.

O sea:

$\theta = k\pi$ en que $k \in \mathbb{Z}$ y k es par.



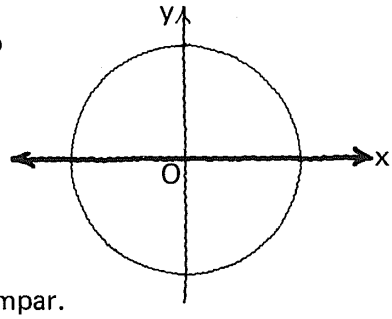
130

Esta es
la representación de un ángulo
cuya medida
es igual a .

un múltiplo impar de π.

O sea:

$\theta = k\pi$ en que $k \in \mathbb{Z}$ y k es impar.



131

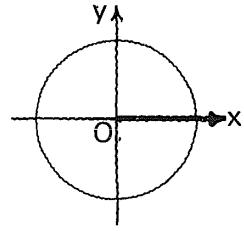
¡Atención!

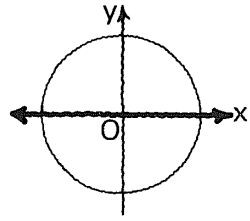
Un ángulo cuya medida
es **un múltiplo de π**,
o sea **un múltiplo par de $\frac{\pi}{2}$**,
tiene
alguna de las dos representaciones
mostradas,
y puede expresarse en alguna
de las dos formas siguientes:

$\theta = k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

o bien

$\theta = \frac{k\pi}{2}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ y k es par.





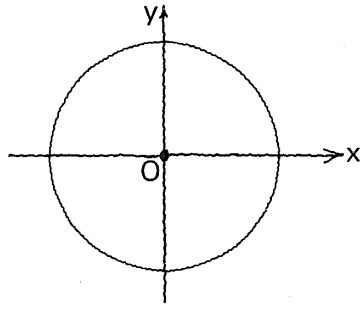
132

El lado móvil de
un ángulo de $\frac{9\pi}{2}$ radianes
cae

[ ]

Medida del ángulo
de referencia:

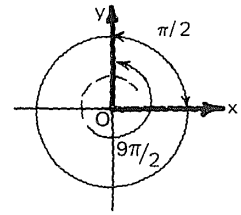
$\theta' =$ [ ]



$\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$

↓

2 vueltas



- entre el primer y segundo cuadrantes
- $\pi/2$ radianes

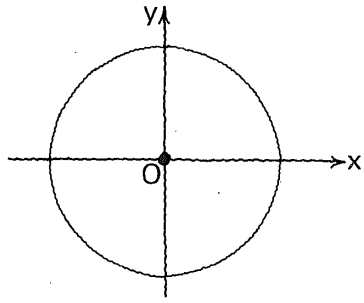
133

El lado móvil de un ángulo de $\frac{11\pi}{2}$ radianes cae

[ ].

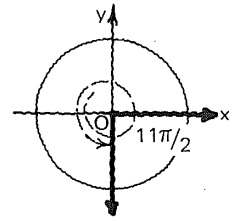
Medida del ángulo de referencia:

$\theta' =$ [ ]



$\frac{11\pi}{2} = 11 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2}$

↓ 2 vueltas



- entre el tercer y cuarto cuadrantes
- $\frac{\pi}{2}$ radianes

134

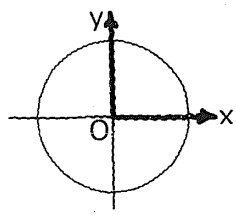
¡Atención!

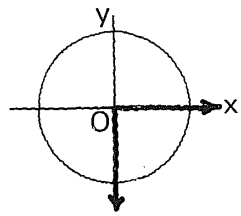
Un ángulo cuya medida es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ tiene alguna de las dos representaciones mostradas, y puede expresarse en alguna de las formas siguientes:

$\theta = k\frac{\pi}{2}$ en que $k \in \mathbb{Z}$ y k es impar.

o bien

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ó $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$





5.3.4.2

Práctica adicional de representación, en el círculo unitario, de un ángulo de medida dada en radianes como un múltiplo par o impar de $\pi/2$, si se considera necesario.

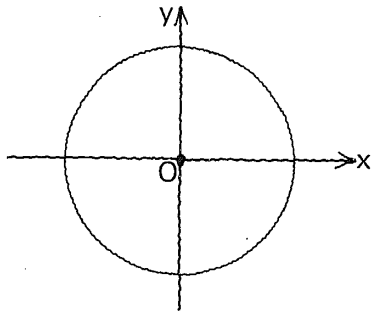
135

El lado móvil de un ángulo de $\frac{11\pi}{4}$ radianes cae en

[ ].

Medida del ángulo de referencia:

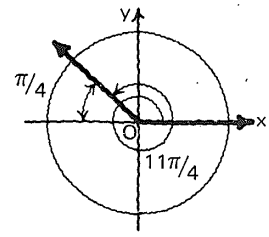
$\theta' =$ [ ]



$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$

↓

1 vuelta.



- el segundo cuadrante
- $\pi - \frac{3\pi}{4}$ = radianes

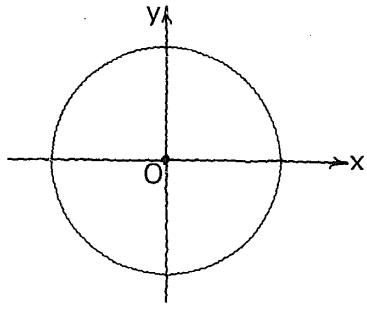
136

El lado móvil de un ángulo de $\frac{19\pi}{3}$ radianes cae en

[ ].

Medida del ángulo de referencia:

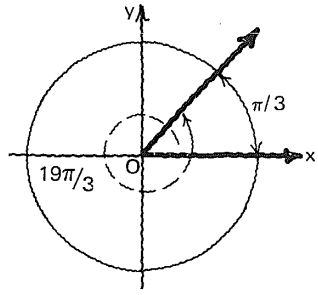
$\theta' =$ [ ]



$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3}$

↓

3 vueltas



- el primer cuadrante
- $\pi/3$ radianes

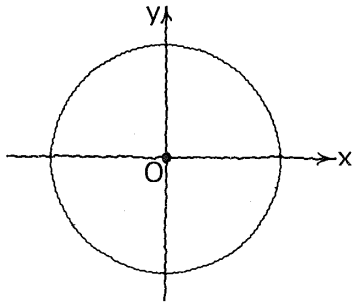
137

El lado móvil de un ángulo de 4.82π radianes cae en

[ ].

Medida del ángulo de referencia:

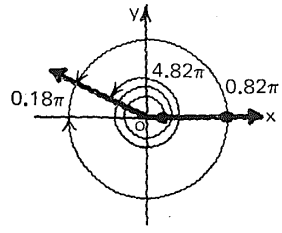
$\theta' =$ [ ]



$4.82\pi = 4\pi + 0.82\pi$

↓

2 vueltas



- el segundo cuadrante
- $\pi - 0.82\pi = 0.18\pi$ radianes.

$\left(\frac{0.18\pi \times 180}{\pi} = 0.18 \times 180 \doteq 32.4^\circ\right)$

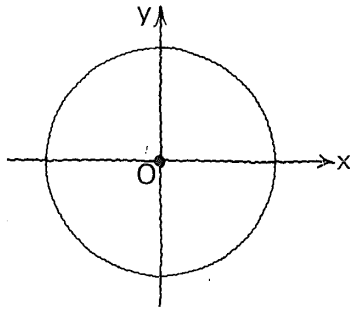
138

El lado móvil
de un ángulo de 25.46 radianes
cae en

_____.

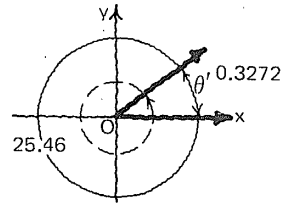
Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ _____



1 vuelta = 2π radianes
$\doteq 6.2832$

$25.46 = \underbrace{6.2832 \times 4}_{\text{4 vueltas}} + 0.3272$



- el primer cuadrante
- $\theta' = 0.3272$ radianes

$\left(\frac{0.3272 \times 180}{\pi} \doteq 18.75^\circ\right)$

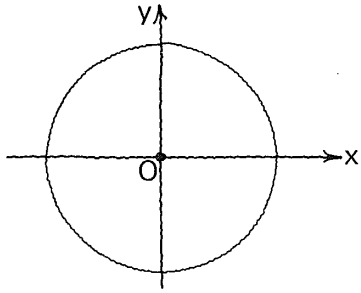
139

El lado móvil
de un ángulo de 80 radianes
cae en

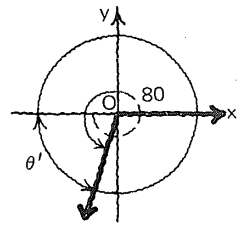
_____.

Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ _____



$80 = \underbrace{12 \times 6.2832}_{\text{12 vueltas}} + 4.6016$



el tercer cuadrante

- $\theta' = 4.6016 - \overbrace{3.1416}^{\pi} = 1.46$ radianes
- $\left(\frac{1.46 \times 180}{\pi} \doteq 83.65^\circ\right)$

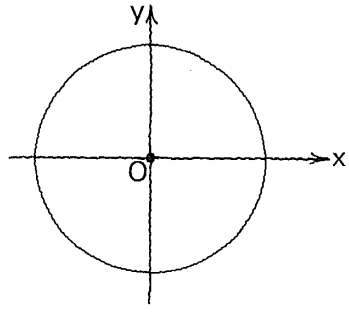
140

El lado móvil
de un ángulo de 30.50 radianes
cae en

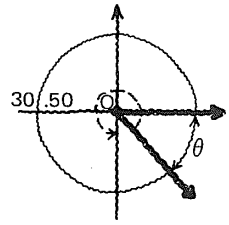
_____.

Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ _____



$30.50 = \underbrace{4 \times 6.2832}_{\text{4 vueltas}} + 5.3672$



- el cuarto cuadrante
- $\theta' = \overbrace{6.2832}^{2\pi} - 5.3672 = 0.9160$ radianes

$\left(\frac{0.9160 \times 180}{\pi} \doteq 52.48^\circ\right)$

5.3.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

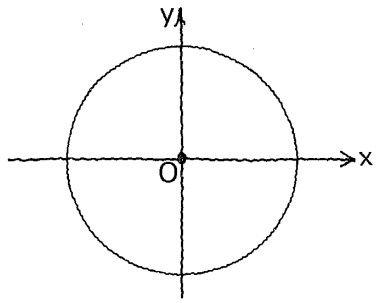
141

El lado móvil
de un ángulo de $-625°$
se encuentra en

_____.

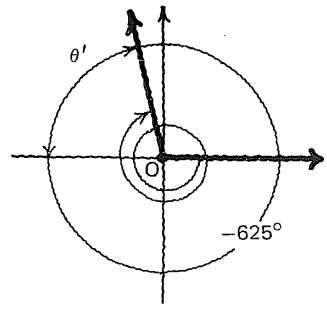
Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ _____



1 vuelta

$360\overline{)625}$
265



- el segundo cuadrante
- $\theta' = 265 - 180 = 85°$

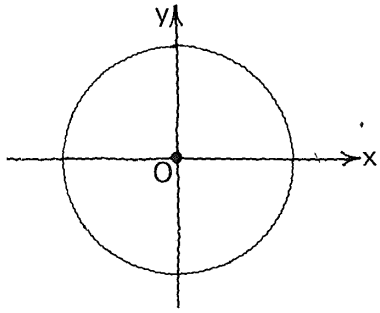
142

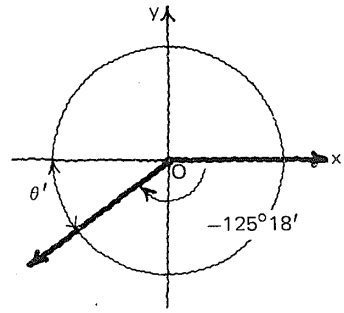
El lado móvil
de un ángulo de $-125°18'$
se encuentra en

_____.

Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ _____





- el tercer cuadrante
- $\theta' = 180° - 125°\,18' = 54°42'$

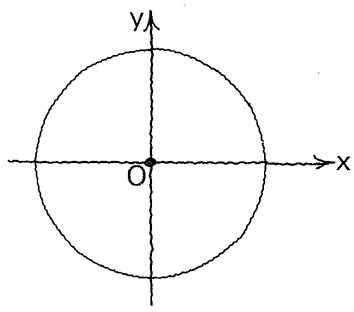
143

El lado móvil
de un ángulo de $-(660°\,14')$
se encuentra en

[ ].

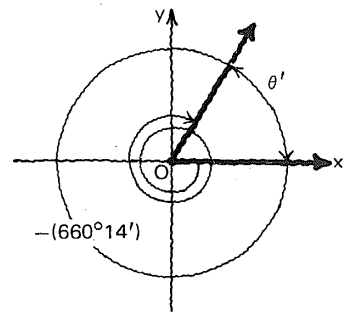
Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ [ ]



1 vuelta

$360\overline{)660}$
$\quad 300$



- el primer cuadrante
- $\theta' = 360° - 300°14' = 59°46'$

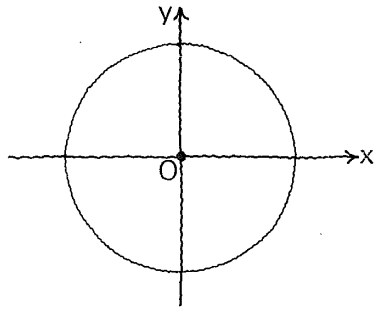
144

El lado móvil
de un ángulo de $-(427°45')$
se encuentra en

[ ].

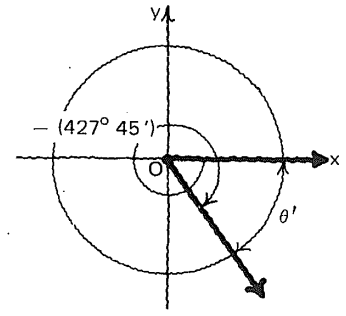
Medida del ángulo
de referencia:

$\theta' =$ [ ]



1 vuelta

$360\overline{)427}$
$\quad 67$



- el cuarto cuadrante
- $\theta' = 427°45' - 360° = 67°45'$

5.3.4.4

Práctica adicional
de
determinación de la posición
del lado móvil para un ángulo negativo
de medida dada en grados o radianes,
si se considera necesario.

5.3.4.5

Práctica adicional
de
determinación del **ángulo de referencia** correspondiente
a un ángulo positivo o negativo
de medida dada en grados o
radianes,
si se considera necesario.

5.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* el conjunto de las medidas en grados o radianes de los ángulos correspondientes a una determinada posición del lado móvil en el círculo unitario;
- *proporcionar*, a partir de un ángulo de medida dada en grados o radianes, el conjunto de ángulos con la misma posición del lado móvil en el círculo unitario;
- *determinar* la posición del lado móvil para un ángulo positivo, negativo o nulo, de medida dada en grados o radianes;
- *determinar* el ángulo de referencia para un ángulo positivo, negativo o nulo, de medida dada en grados o radianes;
- *representar* en el círculo unitario, un ángulo cuya medida es un múltiplo par o impar de $\frac{\pi}{2}$.

3.5

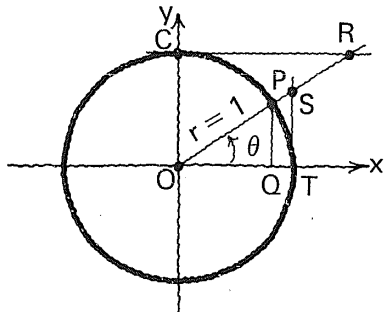
Las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera en el círculo unitario

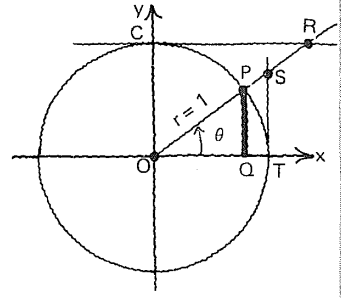
145

En el círculo unitario representado,

sen θ

es la medida del segmento [ ]

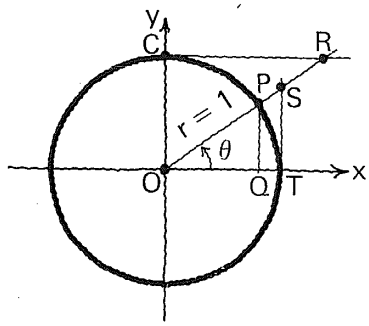




• $\overline{PQ}$

146

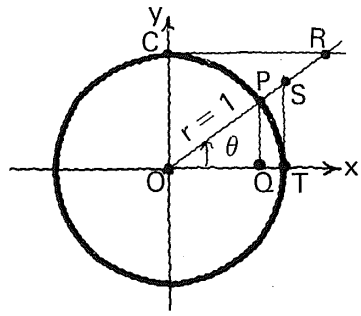
$\cos \theta =$ [ ]



$\overline{|OQ|}$

147

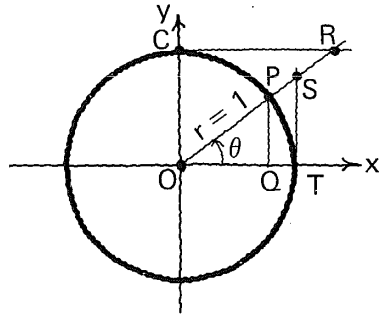
$\tan\theta =$ ____



$|\overline{TS}|$

148

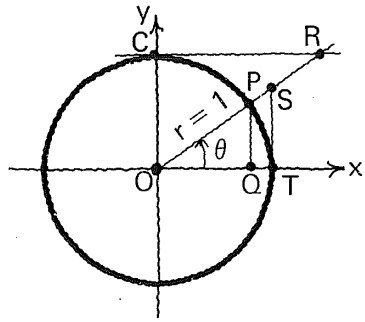
$\cot\theta =$ ____



$|\overline{CR}|$

149

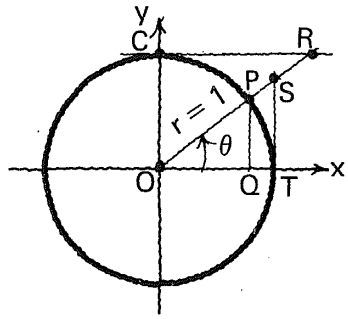
$\sec\theta =$ ____



$|\overline{OS}|$

150

cosec θ = $\overline{\quad\quad}$



$\overleftrightarrow{OR}$

151

Intentaremos definir
en forma más precisa
las razones trigonométricas:

sen θ
cos θ
tan θ
cot θ
sec θ
cosec θ

para aplicarse a ángulos de cualquier medida.

152

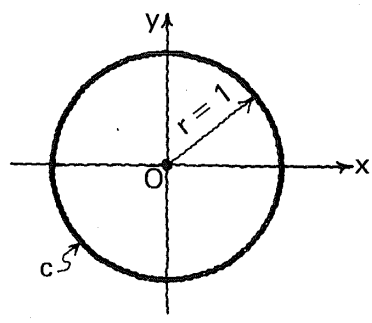
Simbolizaremos así:

c(O, r)

a una circunferencia
de centro O y radio r;

y así: C(O, 1)

a nuestra circunferencia unitaria.



153

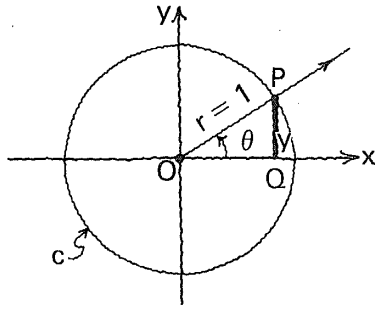
¡Atención!

sen θ

es la ordenada de P
tal que

$\{P\} = \overrightarrow{OP} \cap C(O, 1)$,

siendo
$\overrightarrow{OP}$ el lado móvil del $<\theta$.



154

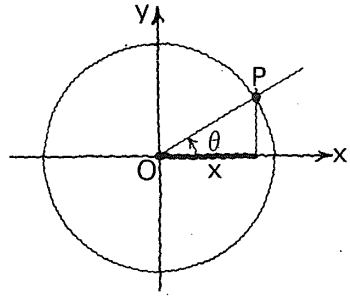
¡Atención!

cos θ

es la abscisa de P
tal que

$\{P\} = \overrightarrow{OP} \cap C(O, 1)$,

siendo
$\overrightarrow{OP}$ el lado móvil del $<\theta$.



155

¡Mucha atención!

tan θ

es la medida del segmento $\overleftrightarrow{TS}$
tal que

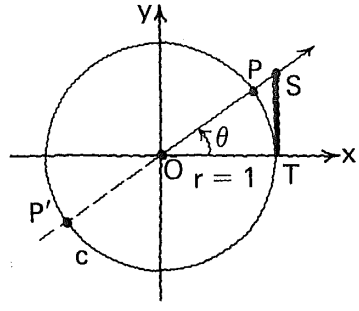
$\{T\} = \overrightarrow{Ox} \cap C(O, 1)$

$S \in \overrightarrow{OP}$ ó $S \in \overrightarrow{OP'}$

(siendo $\overrightarrow{OP}$ el lado móvil del $<\theta$
y $\overrightarrow{OP'}$ su rayo opuesto)

y $\overleftrightarrow{TS} \perp \overleftrightarrow{Ox}$.

Al punto **T** le llamaremos
punto de origen de las tangentes
y estará siempre a la derecha del origen O.

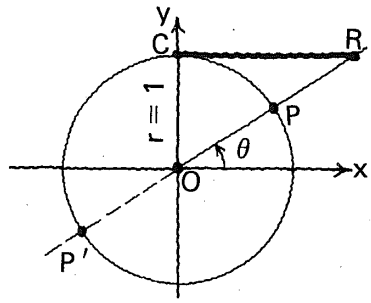


156

¡Mucha atención!

cot θ

es la medida del segmento $\overline{CR}$
tal que $\{C\} = \overrightarrow{OY} \cap C(O, 1)$
$R \in \overrightarrow{OP}$ ó $R \in \overrightarrow{OP'}$
(siendo $\overrightarrow{OP}$ el radio móvil del $<\theta$ y $\overrightarrow{OP'}$ su rayo opuesto), y
$\overleftrightarrow{CR} \perp \overleftrightarrow{OY}$



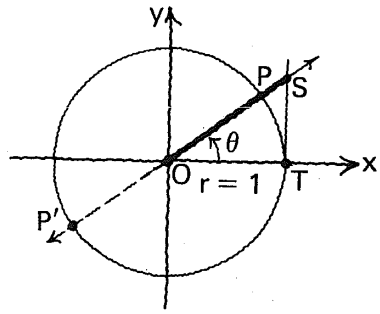
Al punto **C** le llamaremos
punto de origen de las cotangentes
y estará siempre arriba del origen O.

157

¡Atención!

sec θ

es la medida del segmento $\overline{OS}$
tal que O sea el origen
$S \in \overrightarrow{OP}$ ó $S \in \overrightarrow{OP'}$
(siendo $\overrightarrow{OP}$ el lado móvil del $<\theta$ y $\overrightarrow{OP'}$ su rayo opuesto)
$\{S\} = \overrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{TS}$ ó $\{S\} = \overrightarrow{OP'} \cap \overleftrightarrow{TS}$
(siendo $|\overline{TS}| = \tan\theta$)

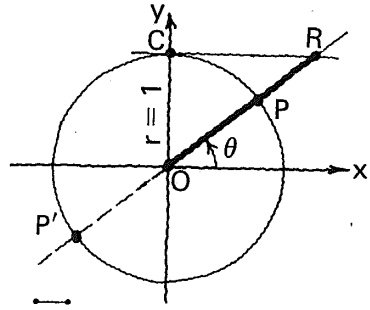


158

¡Atención!

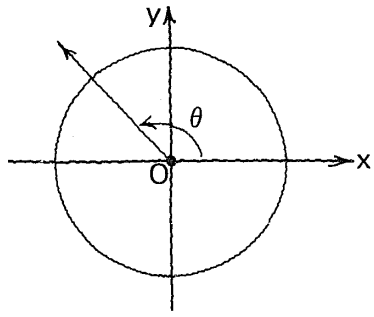
cosec θ

es la medida del segmento $\overline{OR}$
tal que O es el origen
$R \in \overrightarrow{OP}$ ó $R \in \overrightarrow{OP'}$
(siendo $\overrightarrow{OP}$ el lado móvil del $<\theta$ y $\overrightarrow{OP'}$ su rayo opuesto)
$\{R\} = \overrightarrow{OP} \cap \overline{CR}$ ó $\{R\} = \overrightarrow{OP'} \cap \overline{CR}$
(siendo $|\overline{CR}| = \cot\theta$)



159

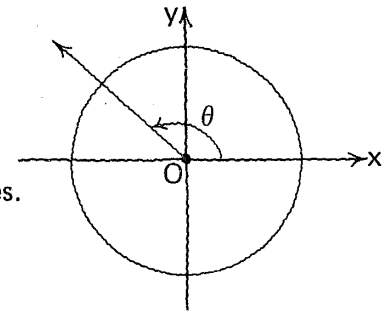
Consideremos,
ahora,
un ángulo θ
cuyo lado móvil cae
en el **segundo cuadrante.**



160

$\square < \theta < \square$ en grados.

$\square < \theta < \square$ en radianes.



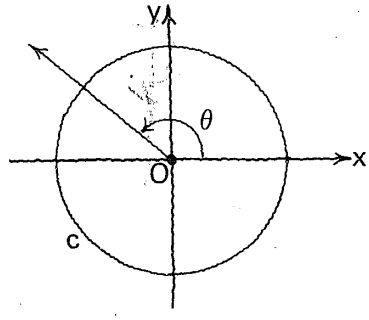
$90° < \theta < 180°$

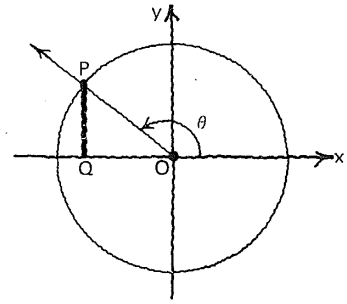
$\pi/2 < \theta < \pi$

161

Ahora,
de acuerdo con la definición
dada en el cuadro153
trazar el segmento de recta
correspondiente a

sen θ.



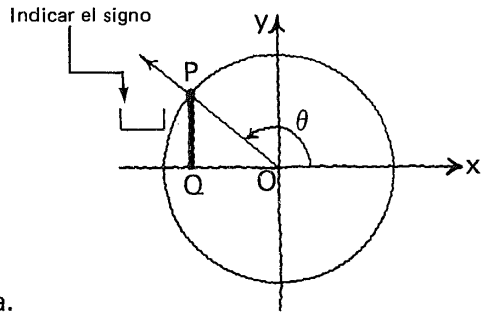


162

Observamos que
siendo sen θ
la ordenada de P,
es un número

positivo/negativo

de acuerdo con la
convención adoptada.



⊕

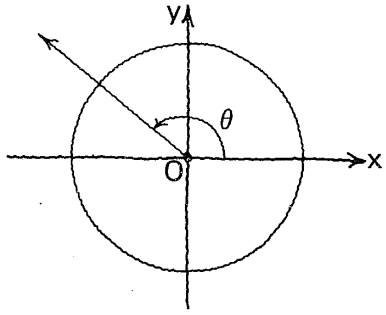
positivo

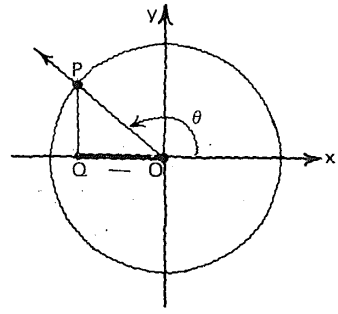
163

Trazar el segmento de recta
correspondiente a

cos θ,

e indicar su signo.





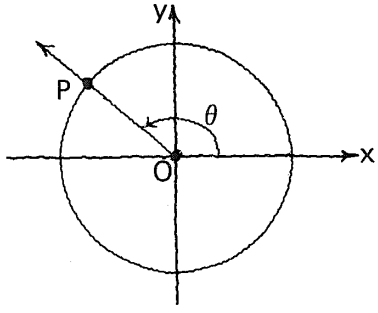
164

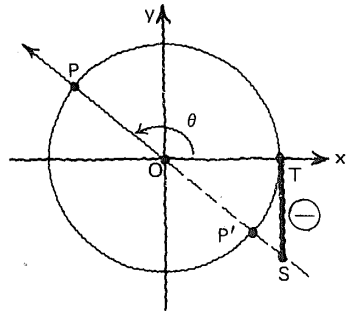
¡Atención!

Trazar el segmento de
recta correspondiente a

tan θ,

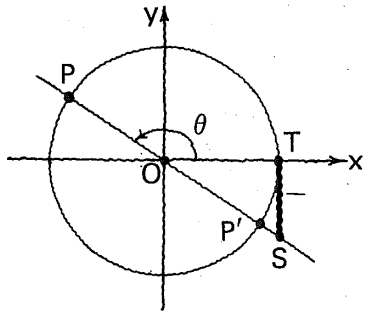
después de haber observado
cuidadosamente la
definición.





165

A un segmento como el $\overline{TS}$, paralelo al eje $\overleftrightarrow{Oy}$, y "que se extiende a partir del eje $\overleftrightarrow{Ox}$ hacia abajo" le aplicaremos signo —.



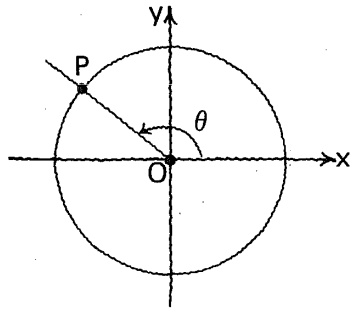
166

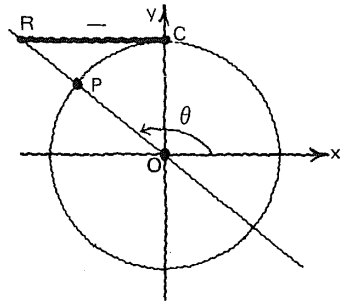
Trazar el segmento de recta correspondiente a

cot θ

después de haber observado cuidadosamente la definición.

Indicar el signo.

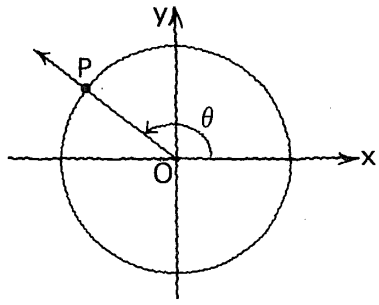


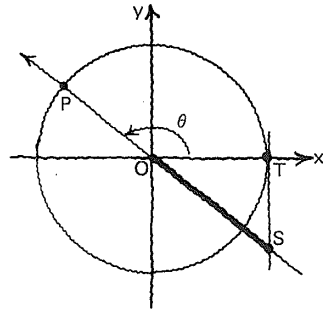


167

Trazar el segmento de recta correspondiente a

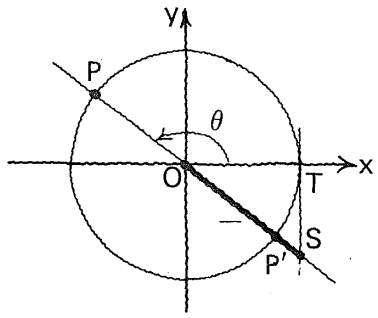
sec θ.





168

A **sec** θ
le asignaremos $+$
si
$\overleftrightarrow{OS} \subset \overrightarrow{OP}$,
y $-$
si
$\overleftrightarrow{OS} \subset \overrightarrow{OP'}$.

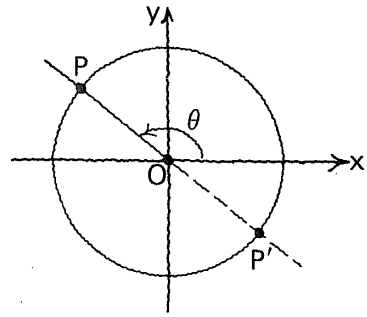


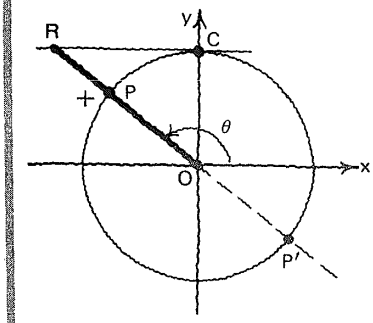
169

Trazar el segmento de recta correspondiente a

cosec θ

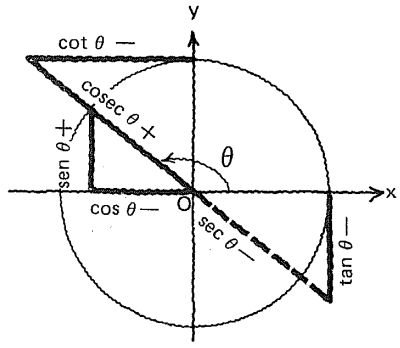
y aplicar el signo
de acuerdo con una convención
similar a la utilizada para
la secante.





170

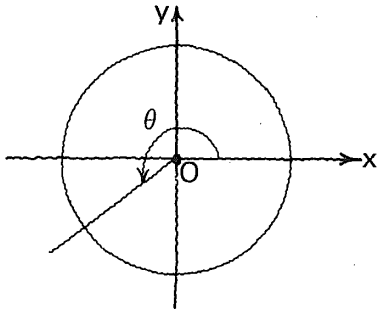
Estudiar con atención.



Las razones trigonométricas de θ en el círculo unitario cuando el lado móvil del ángulo θ cae en el **segundo cuadrante.**

171

Ahora, consideraremos un ángulo θ cuyo lado móvil cae en el **tercer cuadrante.**

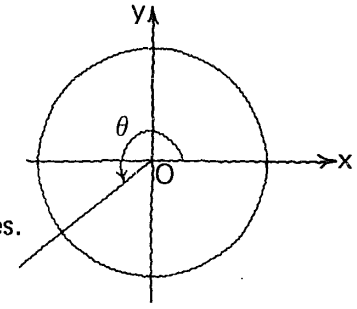


172

En este caso:

$\square < \theta < \square$ en grados.

$\square < \theta < \square$ en radianes.



180° 270°

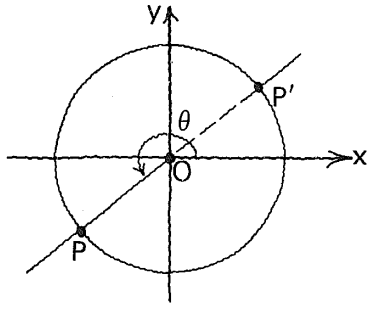
π $\frac{3\pi}{2}$

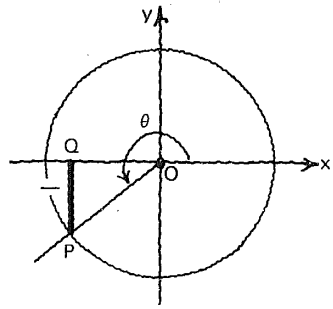
173

Trazar el segmento correspondiente a

sen θ,

e indicar su signo.



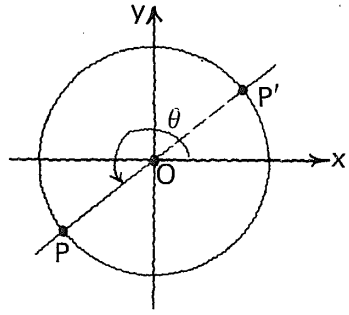


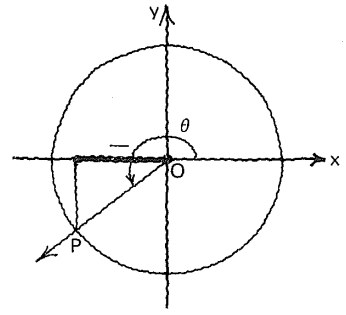
174

Trazar el segmento correspondiente a

cos θ

e indicar su signo.



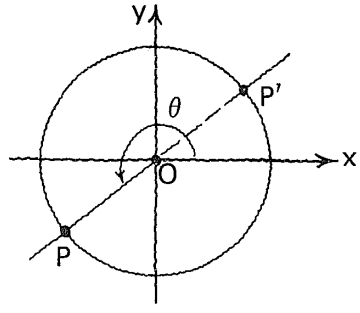


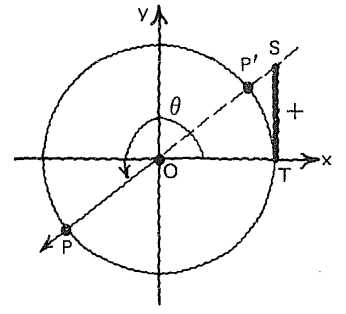
175

Trazar el segmento correspondiente a

tan θ

e indicar su signo.



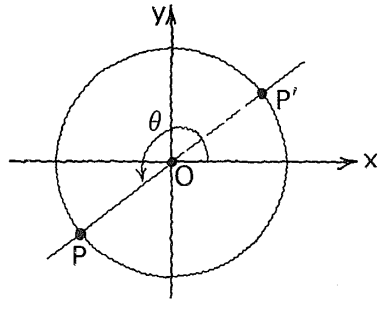


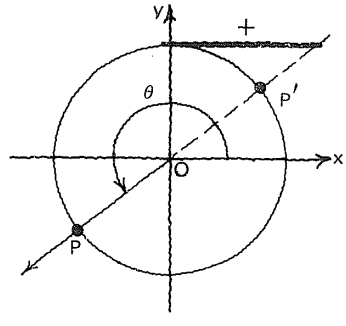
176

Trazar el segmento correspondiente a

cot θ

e indicar su signo.



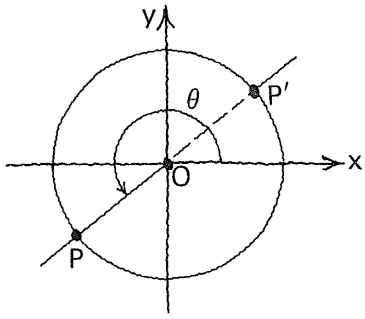


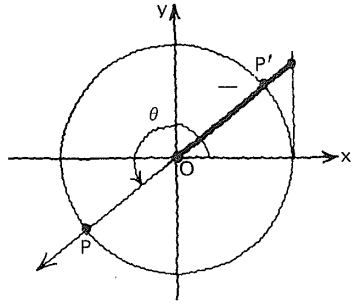
177

Trazar el segmento correspondiente a

sec θ

e indicar su signo.



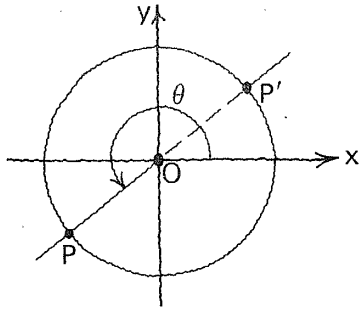


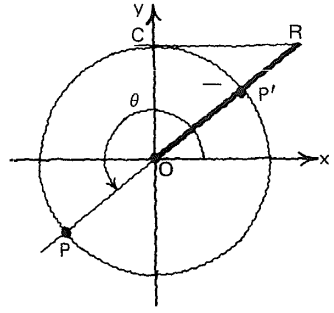
178

Trazar el segmento correspondiente a

cosec θ

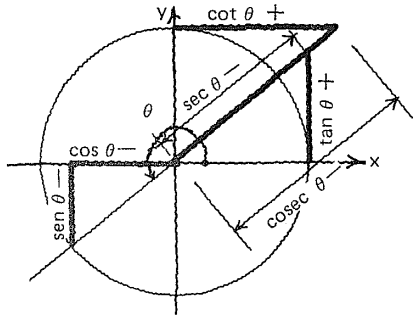
e indicar su signo.





179

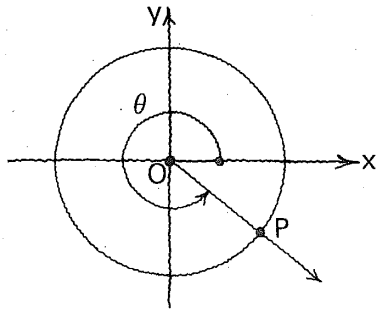
Estudiar con atención.



Las razones trigonométricas de θ en el círculo unitario, cuando el lado móvil del ángulo θ cae en el **tercer cuadrante.**

180

Finalmente, vamos a considerar:
un ángulo θ
cuyo lado móvil cae
en el **cuarto cuadrante.**

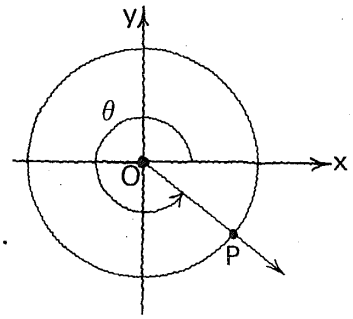


181

Ocurre que:

$\square < \theta < \square$ en grados.

$\square < \theta < \square$ en radianes.

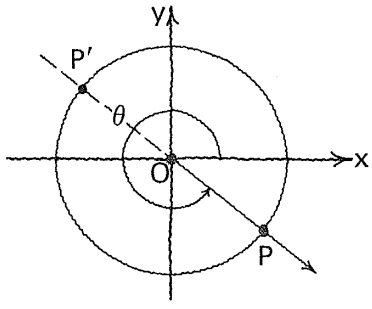


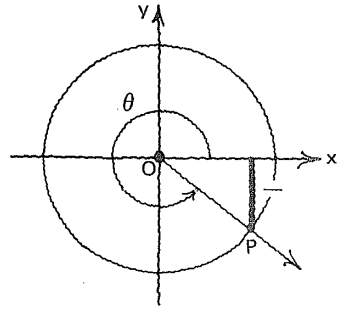
270° 360°

$\frac{3\pi}{2}$ 2π

182

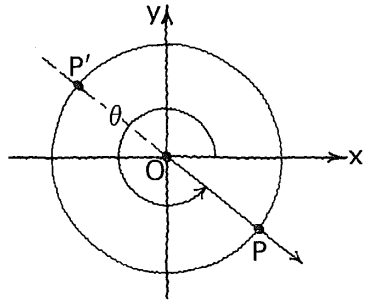
Trazar **sen** θ,
e indicar su signo
correspondiente.

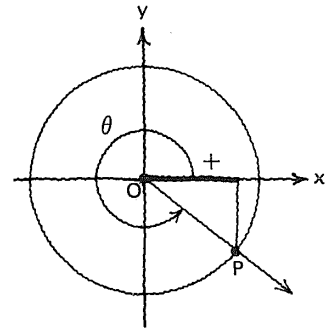




183

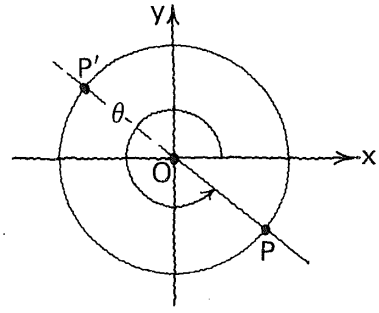
Trazar **cos** θ,
e indicar su signo
correspondiente.

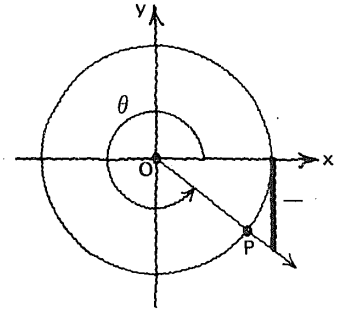




184

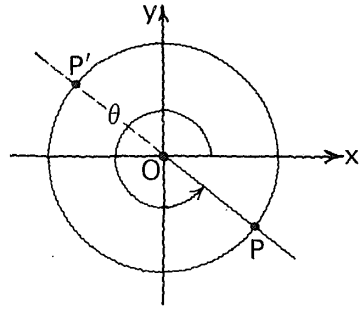
Trazar **tan** θ,
e indicar su signo
correspondiente.

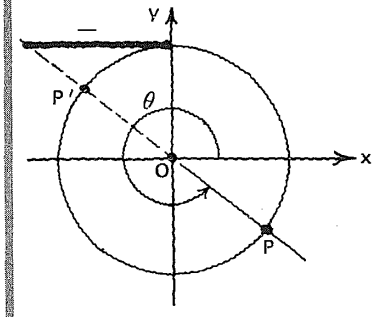




185

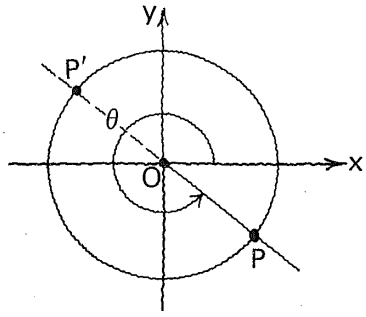
Trazar **cot** θ,
e indicar su signo
correspondiente.

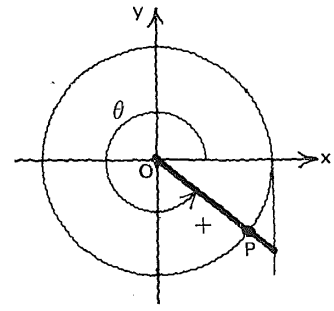




186

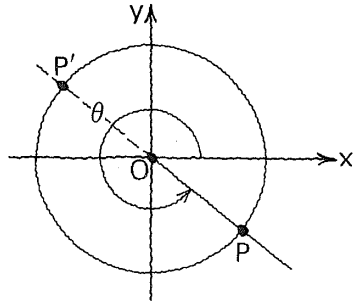
Trazar **sec** θ,
e indicar su signo
correspondiente.

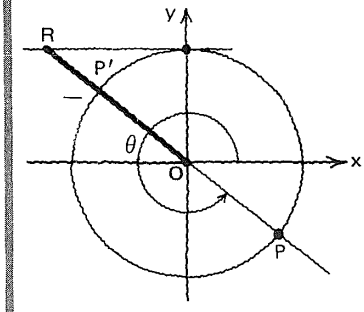




187

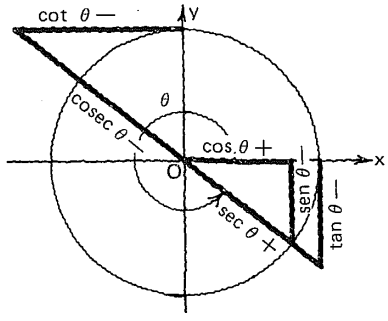
Trazar **cosec** θ,
e indicar su signo
correspondiente.





188

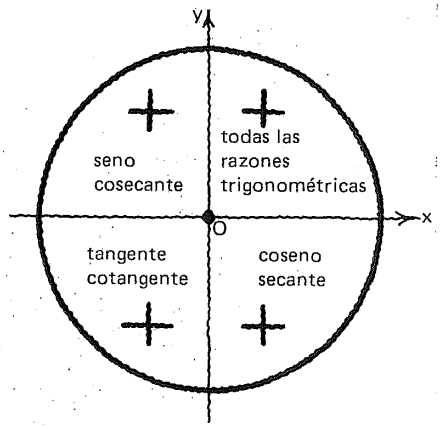
Estudiar con atención:



Las razones trigonométricas de θ, en el círculo unitario, cuando el lado móvil de θ cae en el **cuarto cuadrante.**

189

Debemos tener presente
este esquema
para los signos de las
razones trigonométricas.



190

La consideración de las razones trigonométricas
como
medidas de segmentos rectilíneos en el círculo unitario,
nos sugiere un procedimiento gráfico
para determinar
cualquier razón trigonométrica de un ángulo dado,
positivo o negativo.

5.3.5.1

Práctica adicional de
determinación gráfica
de una razón trigonométrica cualquiera
para un ángulo positivo o negativo
de medida dada en
grados o radianes,
si se considera necesario.

5.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *representar* en el círculo unitario, las razones trigonométricas de un ángulo positivo o negativo, cuyo lado móvil cae en alguno de los cuatro cuadrantes;

- *determinar* gráficamente una de las razones trigonométricas de un ángulo positivo o negativo, de medida dada en grados o radianes.

3.6

Determinación de las razones trigonométricas para ángulos de cualquier medida

191

Estamos en condiciones
de determinar
cualquier razón trigonométrica
para un ángulo de cualquier medida,
a partir de los enunciados del
cuadro siguiente,
que deben ser estudiados con
mucha atención.

192

Atención.

1. **Una razón trigonométrica de θ = la misma razón trigonométrica de $(\theta - 360°k)$**
   ó $(\theta - 2k\pi)$

2. **Una razón trigonométrica de $\theta = \pm$ la misma razón trigonométrica de θ' ***

* θ' es el **ángulo de referencia** correspondiente a θ. El signo + ó − se asignará de acuerdo con la razón de que se trate y del cuadrante en que cae el lado móvil de θ.

193

Por ejemplo:

1. $\begin{cases} \text{sen } \theta = \text{sen } (\theta - 360°k) \text{ en grados.} \\ \text{sen } \theta = \text{sen } (\theta - 2k\pi) \text{ en radianes.} \end{cases}$

2. $\text{sen } \theta = \pm \text{ sen } \theta'$.*

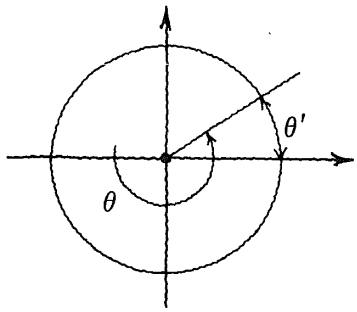
* El signo + ó − se asignará de acuerdo con el cuadrante en que cae el lado móvil de θ.

194

Así:
si el lado móvil de θ cae en el primer cuadrante:

sen θ = ⌊ ⌋ sen θ'

indicar el signo



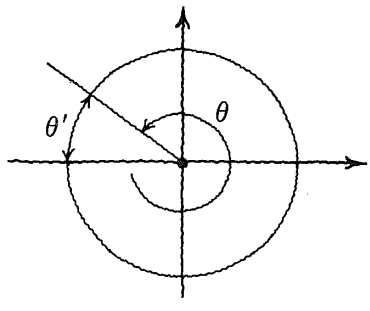
+

195

Si el lado móvil de θ cae en el segundo cuadrante:

sen θ = ⌊ ⌋ sen θ'

indicar el signo



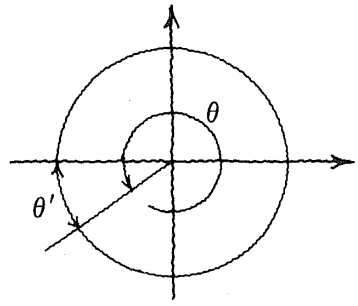
+

196

Si el lado móvil de θ cae en el tercer cuadrante:

sen θ = ⌊ ⌋ sen θ'

indicar el signo



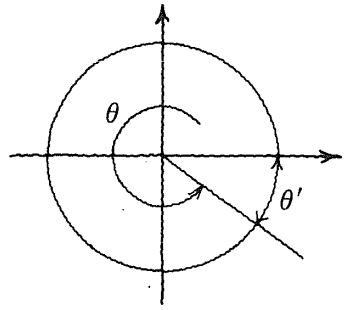
–

197

Si el lado móvil de θ cae en el cuarto cuadrante:

sen θ = ⌊ ⌋ sen θ'

indicar el signo



–

5.3.6.1

Práctica adicional de determinación del signo en la fórmula:

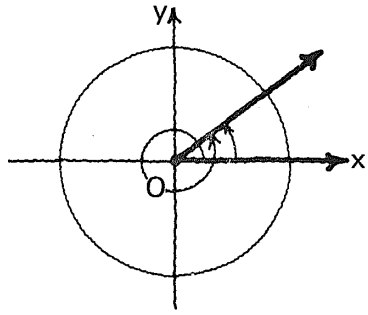
$$f_t(\theta) = \pm f_t(\theta')$$

para las otras razones trigonométricas, si se considera necesario.

198

La proposición **1** del cuadro 192 expresada en otros términos.

Los ángulos cuyo lado móvil ocupa la misma posición en el círculo unitario, tienen razones trigonométricas iguales.



199

Se requiere determinar:

sen 1427°.

Puesto que 1427° = 360° X 3 + **347°**, el lado móvil está en

[_____]

el cuarto cuadrante

200

En el cuarto cuadrante, el seno es [_____]
positivo/negativo

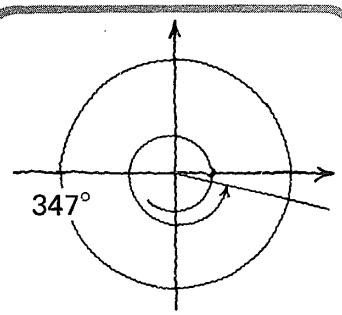
negativo

201

Atención.

De acuerdo con la proposición **1**, del cuadro 192:

sen 1427° = sen [_____]



1427° − (3 × 360°) = 347°

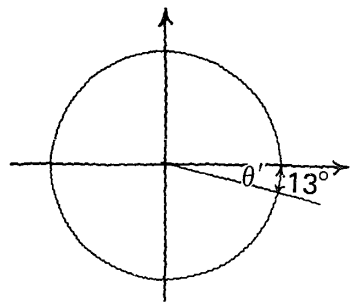
202

De acuerdo con la proposición **2**, del cuadro 192:

sen 1427° = [_____] sen [_____]

↑ Indicar el signo

↑ ángulo de referencia θ'



• − • 13°

↑

(360° − 347°)

203

Entonces, escribimos :

sen 1427° = −sen 13°

Mediante una tabla o calculadora, podemos obtener:

sen 13° ≐ [_____]

0.2250

204

De manera que:

sen 1427° ≐ [ ]

−0.2250

205

Se requiere determinar:

cos 845°20′.

1. cos 845°20′ = [ ]

$845°20' = 360° \times 2 + 125°20'$

$845°20' - 360° \times 2 = 125°20'$

206

1. cos 845°20′ = cos 125°20′

2. cos 845°20′ = [ ] cos [ ]
   (+/− ; ángulo de referencia)

El lado móvil cae en el segundo cuadrante, en que el coseno es negativo.

• — • 54°40′

$180° - 125°20'$

207

1. cos 845°20′ = cos 125°20′
2. cos 845°20′ = −cos 54°40′

cos 54°40′ ≐ [_____]

Por lo tanto:

cos 845°20′ ≐ [_____]

0.5783

−0.5783

208

Se requiere determinar:

tan 252°47′.

1. tan 252°47′ = tan [_____]

$\underbrace{252°47' - 0 \times 360°}$

● 252°47′

Ya que:

252°47′ = 0 × 360°
+ 252°47′

209

1. tan 252°47′ = tan 252°47′
2. tan 252°47′ = [_____] tan [_____]
   +/− ángulo de referencia

tan 252°47′ = tan [_____]

tan 72°47′ ≐ [_____]

Por lo que:

tan 252°47′ ≐ [_____]

● +

● 72°47′

$\underbrace{252°47' - 180°}$

72°47′

3.2271

3.2271

210

Atención especial.

Se requiere determinar:

cot − 740°.

1. cot − 740° = [ ]

$-740° = 360° \times (-3) + 340°$

o bien

$-740° = 360° \times (-2) - 20°$

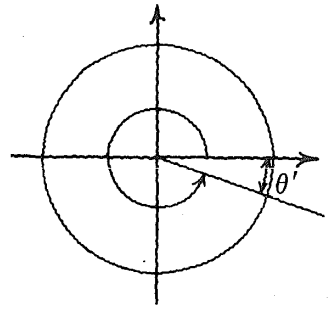
- cot 340°
  o bien
  cot −20°

211

Atención.

Alternativa 1.

1. cot −740° = cot 340°
2. cot 340° = [ ]



−cot 20°

212

1. cot −740° = cot 340°
2. cot 340° = −cot 20°

   cot 20° ≐ [ ]

   cot −740° ≐ [ ]

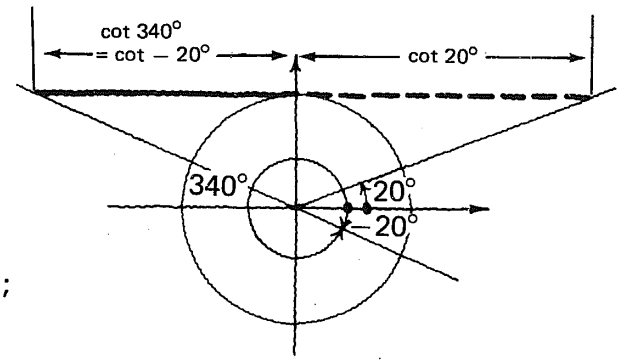
2.7475

−2.7475

213

Atención.

Alternativa 2.



De acuerdo con la proposición **1**:

$$\cot -740^\circ = \cot -20^\circ$$

De la observación cuidadosa de la figura, podemos deducir que:

$$\textbf{cot} -20^\circ = \textbf{cot } 340^\circ = -\textbf{cot } 20^\circ;$$

y como:

$$\cot 20^\circ \doteq 2.7475$$

$$\cot -740^\circ \doteq -2.7475$$

214

Se requiere determinar:

sec 2000°

1. sec 2000° = [_____]

$2000^\circ = 360^\circ \times 5 + 200^\circ$

↓

sec 200°

215

1. sec 2000° = sec 200°.

2. sec 2000° = [____] sec [_____]

+/− ángulo de referencia

•— • 20°

216

1. sec 2000° = sec 200°

2. sec 200° = −sec 20°

   sec 20° ≐ [_____]

   sec 2000° ≐ [_____]

Atención.

cos 20° ≐ 0.9397
sec 20° ≐ 1/0.9397
≐ 1.06462

1.06462

−1.06462

217

Se requiere determinar:

cosec 1440°

1. cosec 1440° = [_____]

1440° = 360° × 4 + 0°

↓

cosec 0°

218

1. cosec 1440° = cosec 0°

   cosec 0° = [_____]

sen 0° = 0

$\text{cosec } 0° = \frac{1}{0}$

número no definido.

219

Nos damos cuenta de que:

cosec 1440° = cosec 0° = número no definido.

5.3.6.2

Práctica adicional
de
determinación
de una razón trigonométrica dada
para un ángulo (positivo o negativo)
de medida dada en grados,
si se considera necesario.

220

Ahora,
se requiere determinar:

$$\text{sen } \frac{17\pi}{3}.$$

1. $\text{sen } \frac{17\pi}{3} =$ _____

$$\frac{17\pi}{3} = 2\pi(2) + \frac{5\pi}{3}$$

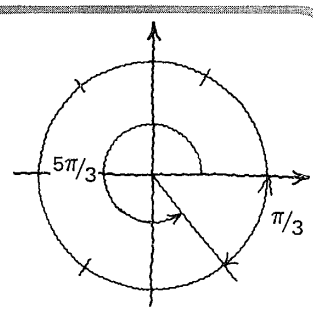
$$\downarrow$$

$$\text{sen } \frac{5\pi}{3}$$

221

1. $\text{sen}\ \dfrac{17\pi}{3} = \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}$

2. $\text{sen}\ \dfrac{17\pi}{3} = \underbrace{\boxed{}}_{+/-}\ \text{sen}\ \underbrace{\boxed{}}_{\text{ángulo de referencia } \theta'}$



- $-$
- $\dfrac{\pi}{3}$

222

1. $\text{sen}\ \dfrac{17\pi}{3} = \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}$

2. $\text{sen}\ \dfrac{17\pi}{3} = -\text{sen}\ \dfrac{\pi}{3}$

$\text{sen}\ \dfrac{\pi}{3} = \boxed{}$ 0.8660

$\text{sen}\ \dfrac{17\pi}{3} = \boxed{}$ -0.8660

223

Se requiere determinar:

cos 14 radianes.

1. $\cos 14 = \boxed{}$

14 radianes $= 6.2832 \times 2 + 1.4336$

$\downarrow$

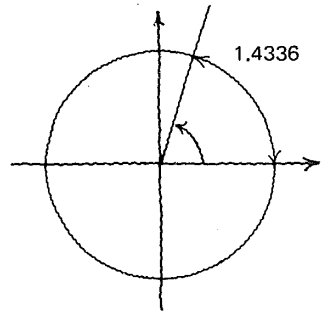
cos 1.4336

224

1. cos 14 ≐ cos 1.4336

2. cos 14 ≐ [ ] cos [ ]

+/− ángulo de referencia θ'



- +
- 1.4336

225

1. cos 14 ≐ cos 1.4336

2. cos 14 ≐ cos 1.4336

cos 1.4336 ≐ [ ]

cos 14 ≐ [ ]

0.1368

0.1368

5.3.6.3

Práctica adicional
de
determinación
de una razón trigonométrica dada
para un ángulo positivo o negativo
de medida dada en radianes,
si se considera necesario.

5.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* una razón trigonométrica de un ángulo positivo o negativo, de medida proporcionada en grados o radianes.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100